835 경영학연구 제39권 제3호 2010년 6월(pp. 835~849)

대여산업을 위한 최적대여기간의 특성*

박해철(교신저자)
중앙대학교 경영대학 교수
(hpark@cau.ac.kr)
조재은
중앙대학교 대학원 경영학과 박사과정
(jaeeun33@gmail.com)

대여산업 공급사슬의 말단에 있는 대여 소매업체의 이익을 극대화하기 위한 최적대여기간의 특성과 대여기간이라는 변수가 지니는 경영적 측면에서의 시사점들을 분석하였다. 이를 위해 대여업체의 이익을 결정하는 주요한 변수인 대여가격이 시장에서 주어진 상태에서, 대여수요의 크기가 대여기간의 함수일 때 대여업체의 이익함수의 성격을 추론하였다. 이를 바탕으로 최적대여기간의 이론적인 상한을 발견하였으며, 또한 이에 근거하여 최적대여기간이 단기간이 되어야 하는 경우의 제반 조건을 유도해내었다.
그리고 대여업의 영업여건에 있어서 주요한 변수인 재고유지비용과 재고부족비용 및 제품구입비용 등이 변할 경우 최적대여기간이 어떻게 영향을 받게 되는지를 분석하였다. 구체적으로 재고유지비용과 재고부족비용이 각각 상승하는 경우에는 최적대여기간은 상승 전보다 단축되어야 대여업체의 이익에 유리하다. 또한 제품구입비용이 상승하는 경우에도 최적대여기간은 역시 제품구입비용의 상승 전보다 단축되어야 수익성 제고에 유리하다.

주제어: 대여기간, 대여산업, 이익함수, 재고유지비용, 재고부족비용

Ⅰ. 서 론

대여산업은 일정한 조건 하에 대여료를 받고 특정기간 동안 고객에게 제품을 대여함으로써 이익을 올리는 산업이다. 비디오 대여업체 또는 서적 대여업체 및 렌터카 업체 등이 이 산업의 범주에 포함되는 대표적인 기업들이다. 이러한 대여업체들은 제조업체나 도매업체로부터 대여 대상이 되는 제품을 구입하여 일정기간 동안 보유하면서, 고객들의 대여수요에 대응하는 사업 모델을 가지고 있다. 따라서 동일한 제품을 다수 보유하고 있는 것이 보통이며 이들에게 중요한 경영 이슈는 적정한 대여가격과 대여기간의 책정, 그리고 대여를 위해 구입하는 제품의 양을 결정하는 것 등의 재고관리 문제이다.

이중에서 대여가격은 대여수요의 크기에 영향을 주고 결과적으로 대여수입의 수준에 커다란 파급효과를 줄 것이 자명하므로, 과거의 대부분의 연구는 대여업체의 이익을 최대화하기 위한 최적대여가격의 설정 문제에 많은 관심을 기울여 왔다(Tang and Deo, 2008). 또한 대여업체는 보유재고의 부족으로 고객의 대여수요에 부응을 하지 못할 경우 상당한 수준의 비용을 지출하는 경우가 일반적이다. 재고부족으로 인해 주문에 대응하지 못하게 되면 이익창출기회의 상실은 물론, 고객의 신용마저도 잃게 되어 현저한 경쟁력의 저하를 경험하게 된다. 반대로 지나치게 많은 제품을 보유하는 것

논문접수일: 2010. 1　　　　게재확정일: 2010. 3
* 본 연구는 2010년도 중앙대학교 학술연구비 지원에 의하여 이루어졌음

은, 그 구입비용뿐만 아니라 추가적인 재고유지의 부담을 유발하기 때문에 바람직하지 못하다. 이와 같은 대여업체의 재고관리 이슈에 대한 연구는 박해철(2009a)을 참고할 수 있다.

하지만 대여가격의 책정이나 재고관리 등의 이슈에 비하여 최적대여기간의 설정 문제는 과거 연구자들에 의해 그리 주목을 받아오지 못한 것이 사실이다. 대여기간이라는 이슈도 대여가격과 마찬가지로 대여수요의 크기에 영향을 미칠 수 있으며, 따라서 대여수입의 수준에 상당한 파급효과를 끼칠 수 있다. 동일한 대여가격대에서 대여기간을 짧게 책정하는 경우 고객의 입장에서 해당 대여업체의 매력도는 떨어질 수밖에 없다. 이러한 대여산업의 전형적인 예로서는 비디오대여업이나 서적대여업, 또는 금고대여업 등을 들 수 있을 것이다. 해당 업종들의 경우, 고객들은 대여기간이 길수록 관련 제품의 활용성이 높아지므로 당연히 보다 긴 대여기간을 선호하기 마련이다. 반대로 지나치게 대여기간을 길게 책정하면 제품의 회전율이 떨어지면서 자연히 해당업체의 수익성 저하로 이어질 수 있다고 하는 것이다.

본 연구에서는 이러한 대여업체의 고민을 중심으로, 대여수요가 대여가격과 마찬가지로 대여기간의 함수이면서, 또한 수요의 불확실성이 존재하는 상황에서 최적대여기간의 수치적인 최적값보다는 그 구조와 특성을 찾고자 한다. 즉, 특정 대여업체의 입장에서 대여가격이라고 하는 경영변수가 외부의 여건에 의해 또는 자의적 결정에 의해 이미 주어졌다고 할 때, 자신의 이익을 최대화할 수 있도록 하는 또 다른 경영변수인 대여기간의 최적화를 기할 수 있는 조건을 찾고자 한다.

이를 위해서 분석의 기본이 되는 모형을 먼저 소개하고 관련된 비용함수와 이익함수를 대여기간의 함수로서 유도하게 된다. 이후 이 함수들의 성격을 분석하여 최적대여기간의 특성이 어떻게 나타날 수 있는지를 보기로 한다. 그리고 최적대여기간의 결정에 영향을 미치는 여러 가지 경영환경과 관련된 변수들의 변화에 최적대여기간이 어떻게 영향을 받게 되는지를 살펴보기로 한다.

Ⅱ. 기존의 연구

대여산업의 경영 이슈에 관한 연구가 가장 활발하게 이루어진 분야는 최적대여가격의 설정과 제품구입량의 결정에 관한 문제이다. 이 분야의 널리 알려진 대표적인 연구는 Tang and Deo(2008)의 연구로서, 그들은 비디오 대여산업을 중심으로 최적대여가격과 최적의 제품구입량에 관한 확률적 의사결정모형을 제시하였다. 또 다른 대표적인 연구로는 Cachon and Lariviere(2004)의 경우를 들 수 있다. 그들은 대여산업의 경우에 활용될 수 있는 수입공유거래모형을 비롯한 다양한 거래모형들의 특징과 유사점을 비교하면서, 이 거래모형들이 수요에 미치는 역학적인 영향과 기업의 수익성에 미치는 파급효과에 대해서 분석하였다. 이들의 연구는 박해철(2009b)에 의하여, 최근에 프랜차이즈 모형이 대여산업 뿐만 아니라 더욱 다양한 산업분야로 확장될 수 있는 거래모형이 될 수 있음을 논증하는 결과로 연결되었다.

이러한 접근과 병행하여 대여산업의 재고관리에도 전통적으로 주요한 관심이 지속되어 왔다. 이 분야에서의 주요 관심사는 재고를 관리하면서 발생하게 되는 재고유지 및 재고부족에 의한 관련비용을 최소화할 수 있도록 안전재고의 운용과 함께 적

정 재고수준을 찾고자 하는 문제로 요약될 수 있다(Dada and Petruzzi, 1999). 특히 수요가 불확실할 때 이에 효과적으로 대처하기 위하여 안전재고를 어느 수준으로 유지하여야 하는가 하는 문제에 많은 관심이 기울여져 왔다(Silver et al., 1998). 또한 재고관리 이슈와 가격책정의 이슈를 함께 결합하여 경영성과를 제고하고자 하는 연구로는 Bernstein and Federgruen(1999)을 들 수 있다.

재고관리를 다루고 있는 연구들 중에서 수요가 가격의 함수로서 변동하는 성향을 가지고 있는 모형의 경우와 같이 현실에 대한 실질적인 설명력이 있는 재고관리의 모형은, 다양한 연구자들에 의해 많은 모형이 제안되어 왔다(Bell et al., 1998). 특히 이러한 이슈에 대해서 잘 알려진 대표적인 연구로서는 Carlton(1978)에 의한 모형을 들 수 있다. 그는 시장에 수요측면에서 불확실성이 존재할 때 시장의 변동에 기업이 어떻게 반응하고 재고관리정책을 바꾸어야 하는지에 대한 영향을 분석하였다.

본 연구의 주제인 대여기간이라는 경영변수의 성격과 최적화에 관한 연구는 앞에서의 주제들과 비교하여 볼 때 그렇게 활발하지 못하였던 것이 사실이다. 전반부에서 언급한 대표적인 연구인 Tang and Deo(2008)의 연구모형에 수요의 변동에 영향을 미치는 요인으로서 대여기간이 개입되어 있기는 하지만, 그들은 대여기간의 최적화에 관한 구체적인 분석을 시도하지는 않았다. 그들의 주관심사는 최적대여가격의 설정과 이에 상응하는 최적재고수준을 구하고 이에 의한 최대이익을 구하는 것이었다. 이에 비해서 본 연구는 기본적인 모형은 그들이 제안한 것을 활용하지만, 최적화를 위한 분석의 대상을 대여기간으로 하였다는 점이 다르다고 볼 수 있다.

대여기간을 다룬 이와 유사한 연구로는 Milkman et al.(2009)에 의한 DVD 대여산업을 대상으로 한 연구가 있다. Wertenbroch(1998)과 Oster and Morton(2005)의 연구에 기반을 두고 이들은 DVD에 수록된 영화의 성격에 따라 흥행가치성 DVD와 소장가치성 DVD로 분류를 한 후, 고객들이 이 두 그룹의 DVD를 각각 다른 패턴으로 반납하고 있음을 실증적으로 밝혀내었다. 즉, 고객들이 흥행가치성 DVD를 대여하여 가는 경우에는 소장가치성 DVD를 대여하여 가는 경우보다 대여반납기간이 짧은 경향이 있다고 하는 것이다. 그러나 이들 역시 반납 패턴에 차이가 있다는 것을 규명하기는 하였지만, 유형별로 최적대여기간을 찾으려고 하는 노력은 보이지 않았다.

대여기간의 최적화 내지는 성격의 규명과 가장 관련된 연구는 Gerchak et al.(2006)의 연구결과이다. 하지만 그들은 특정 제품의 대여기간의 최적화 보다는 전체대여영업기간의 최적화에 중점을 두었다. DVD산업을 주로 대상으로 한 이들의 관점은 DVD가 처음 출시되었을 때는 수요가 매우 많지만, 시간이 지남에 따라 수요가 점차 감소하는 것이 일반적이므로 특정 DVD에 대한 유효 대여영업기간을 책정하는 것이 중요하다고 하는 것이다. 이러한 관점에서 그들은 각 DVD의 성격별로 전체대여영업기간의 최적화를 성취할 수 있는 이론적 틀을 제공하고자 하였다. 실제로 Kramer(2001)의 보고에 의하면 대다수의 DVD 대여업체들이 각 DVD의 수요가 감소하는 패턴의 차이를 고려하여 최초 구입량과 전체대여영업기간을 결정하게 되면 그들의 수익성이 향상되는 경험을 한다고 한다.

Ⅲ. 모형의 설정과 분석

3.1 기본적인 가정

본 연구에서 다루고자 하는 업체는 공급사슬의 말단에 있는 대여소매점이다. 이 업체는 특정지역에 대해 독점 소매업자로서의 위치를 확보하고 있으며, 단위당 c의 가격으로 대여 대상이 되는 제품을 도매업체 또는 제조업체로부터 구입한다고 한다. 그리고 고객에게 단위당 $p(<c)$의 가격으로 대여를 해주고 있다. 대여기간은 τ-기간 이내이며, τ는 양의 정수이다. 그리고 이 대여업체는 특정한 영업기간(T) 동안 이와 같은 대여와 회수 과정을 반복하여 이익을 얻은 후에는, 해당 제품의 대여사업을 마무리한다고 한다. 이 과정에서 해당 대여업체는 구입하는 제품의 양과 대여기간 τ를 자의적으로 결정할 수 있다고 전제한다. 그리고 대여가격 p는 자의적으로 결정할 수 있기도 하고, 시장여건에 의해 외부변수로서 주어진다고 보아도 무방하다. 이상과 같은 상황에 바탕을 두고 Tang and Deo(2008)는 식(1)과 (2)가 성립한다고 가정하였다.

먼저 그들은 해당 제품에 대한 t-시점의 단위기간(하루) 당 대여수요인 D_t는 다음과 같이 대여가격 및 대여기간의 함수로 정의하였다.

$$D_t = \mu(p,\tau) + \epsilon \qquad (1)$$

여기서 ϵ은 평균이 0이고 분산이 σ^2인 정규분포를 따른다. 따라서 단위기간동안의 대여수요는 평균이 μ이고 분산이 σ^2인 정규분포를 따르게 된다. 이러한 수요모형은 특히 Dana(1999)의 수요모형을 비롯한 여러 연구에서 수요의 불확실성을 반영하기 위하여 사용되어 왔다. Tang and Deo(2008)는 식(1)의 수요모형이 비교적 안정적이고 계절성이 약한, 그러나 시점에 따른 수요의 불확실성은 확실히 존재하는 대여제품에 잘 부합한다고 설명하였다. 이러한 산업의 예로서는 금고 또는 우편함대여업, 그리고 유행을 잘 타지 않는 서적이나 고전영화 비디오대여업 등을 들 수 있다고 하였다.

그리고 단위기간 동안의 수요의 평균인 $\mu(p,\tau)$는 대여가격과 기간에 대해 다음과 같은 선형 관계로 정의하였다.

$$\mu(p,\tau) = \alpha - \beta p - \frac{\gamma}{\tau} \quad (\alpha,\beta,\gamma > 0) \qquad (2)$$

여기서 Tang and Deo(2008)는 α는 해당제품의 잠재적인 대여시장의 크기이며, β는 대여수요의 가격에 대한 탄력계수, 그리고 γ는 대여기간에 대한 탄력계수로 해석하였다. 이와 같은 선형관계의 수요함수는 비록 간략하기는 하지만, McCardle et al.(2004)에 의해 마케팅 분야의 연구에서 자주 사용되고 있다. 또한 대여수요가 보유재고를 초과할 경우에는, 단위당 s의 재고부족 비용이 발생하고, 반대의 경우에는, 단위기간동안 제품 당 h의 재고유지 비용이 발생한다고 한다.

위와 같은 상황 속에서 대여업체는 자신의 기대이익을 최대화하기 위해서 영업기간 동안 대여가격 p를 어느 수준으로 결정해야 하는지, 또한 주문량 I_0는 얼마나 해야 하는지, 그리고 대여기간은 어느 정도로 하여야 하는지를 결정하여야 한다. 이 중에서 최적대여가격에 대한 부분과 최적주문량에 대한 부분은 앞에서 소개한 Tang and Deo(2008) 및 박해철 · 조재은(2009)의 연구에서 충분히 반영되었다고 알려져 있다. 따라서 본 연구에서는 그들의

연구모형을 활용하면서 그에 더하여 최적대여기간의 특성과 다양한 경영변수에 의한 영향을 분석하고자 한다. 이를 위해 대여제품의 반납패턴이 중요한 역할을 하므로, 대여된 제품의 반납이 전 대여기간에 걸쳐서 균등한 비율로 이루어진다고 하는 새로운 가정을 추가하기로 한다.

3.2 최적대여기간의 특성

Tang and Deo(2008)는 위의 모형을 활용하여 대여사업을 하기 위하여 대여업체가 구입해야하는 제품의 최적구입량과 이에 상응하는 이익함수를 식(3)~식(6)과 같이 유도하였다. 본 연구에서는 이에 바탕을 두고 최적대여기간의 특성을 분석하기 위한 모형으로 확장하기 위해서 그들의 연구결과를 모형 위주로 요약하여 보기로 한다.

먼저 대여업체의 입장에서 앞에서 설명한 재고유지비용 h와 재고부족비용 s를 감안하여 제품을 I_0 만큼 구입할 때, 제품의 단위당 구입가격 c를 포함한 제비용은 다음과 같이 표현된다.

$$TC\,(I_0) = c \cdot I_0 + \sum_{t=1}^{T} [h \times E([I_t]^+) + s \times E([I_t]^-)] \tag{3}$$

여기서 $[I_t]^+$는 t-시점에 잔여재고가 남았을 경우의 그 양을 나타내고, $[I_t]^-$는 재고부족이 일어났을 경우의 재고부족량을 나타낸다. 식(3)을 이용하여 Tang and Deo(2008)는 대여사업 초창기의 특수성을 생략하는 일종의 근사과정(approximation procedure)을 거쳐서 대여업체의 최적구입량 I_0^*를 다음과 같이 구하였다.

$$I_0^* = \mu(p,\tau)\, n_1(\tau) + z^* \sigma\, n_2(\tau) \tag{4}$$

z^*는 표준화정규분포변수로서 $z^* = \Phi^{-1}\left(\frac{s-\frac{c}{T}}{h+s}\right)$로 정의되고, Φ는 표준화정규분포의 확률분포함수(probability distribution function)를 뜻한다.

그리고 $n_1(\tau) = 1 + \sum_{i=1}^{\tau}(1-l_i)$이고, $n_2(\tau) = \sqrt{1+\sum_{i=1}^{\tau}(1-l_i)^2}$이다. 여기서 l_i는 대여시점으로부터 기산하여 이후 1, 2, …, i $(i \le \tau)$ 기간에 이르는 동안에 반납된 제품의 누적비율을 뜻한다. 그러므로 $n_1(\tau)$는 대여기간이 1보다 큰 경우에, 임의의 시점에 대여되어 있는 제품의 양이 단위기간의 평균수요량 μ에 비하여 몇 배나 많은지를 표현하여 주는 일종의 확대인자(amplifier) 역할을 하는 값이 된다. 마찬가지로 $n_2(\tau)$는 확률적 변동을 하는 실제로 대여된 제품의 총량이 가지는 변동성(variation)이, 단위기간의 수요량이 가지는 변동성 σ에 비하여 얼마나 큰지를 나타내는 확대인자 역할을 하는 값이라고 할 수 있다. 그리고 식(4)의 I_0^*에 상응하는 식(3)의 비용함수는 구체적으로 다음과 같이 표현된다.

$$TC\,(I_0^*) = c \cdot \mu(p,\tau)\, n_1(\tau) + T(h+s)\phi(z^*)\sigma\, n_2(\tau) \tag{5}$$

여기서 $\phi(\cdot)$은 표준화 정규분포의 확률밀도함수(probability density function)를 나타낸다. 그리고 대여업체의 이익 π는 식(6)과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned}\pi(p,\tau) &= Tp\mu(p,\tau) - TC(I_o^*) \\ &= [Tp - cn_1(\tau)](\alpha - \beta p - \frac{\gamma}{\tau}) \\ &\quad - T(h+s)\phi(z^*)\sigma n_2(\tau)\end{aligned} \tag{6}$$

이 식을 이용하여 τ가 주어졌을 때 가격 p에 대한 1차조건(first-order condition)을 구하고 대여업체의 이익을 극대화하는 최적가격을 구하는 과정과 결과는 Tang and Deo(2008) 및 박해철·조재은(2009)에 요약되어 있다. 따라서 본 연구에서는 대여가격 p가 이미 최적가격으로서 또는 시장가격으로서 주어졌다고 했을 때, 해당 이익함수를 극대화할 수 있는 최적대여기간 τ^*의 조건과 특성에 대하여 알아보고자 한다. 우선 대여업체의 입장에서 최적대여기간을 설정하여 이익을 극대화하는 최적화 식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\pi^* = \mathrm{Max}_{\tau \geq 1}[Tp\mu(\tau) - TC(I_o^*)]$$
$$= \mathrm{Max}_{\tau \geq 1}\Big[\{Tp - c\,n_1(\tau)\}(\alpha - \beta p - \frac{\gamma}{\tau}) - T(h+s)\phi(z^*)\sigma n_2(\tau)\Big] \quad (7)$$

위의 식에서 최적화 대상이 되는 대여기간 τ는 실질적으로는 정수의 값을 가지는 이산변수이지만, 최적화를 위하여 연속변수로 가정하기로 한다. 또한 고객들이 대여제품을 반납하는 패턴도 실제로는 다양한 형태를 가질 수 있지만, 각 시점별 반납비율이 τ-기간에 걸쳐 균일한 양상을 보이는 균등분포(uniform probability distribution)의 형태를 띤다고 가정한다. 즉 각 대여제품의 각 시점별 반납비율은 $\frac{1}{\tau}$이라고 보기로 한다. 이 경우 $n_1(\tau) = \frac{\tau+1}{2}$이 되고, $n_2(\tau) = (\frac{1}{2} + \frac{\tau}{3} + \frac{1}{6\tau})^{\frac{1}{2}}$이 되므로 식(6)과 식(7)은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\pi(\tau) = \left[Tp - \frac{c(\tau+1)}{2}\right](\alpha - \beta p - \frac{\gamma}{\tau}) - T(h+s)\phi(z^*)\sigma(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{3} + \frac{1}{6\tau})^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

따라서

$$\pi^* = \mathrm{Max}_{\tau \geq 1}\left[\left\{Tp - \frac{c(\tau+1)}{2}\right\}(\alpha - \beta p - \frac{\gamma}{\tau}) - T(h+s)\phi(z^*)\sigma(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{3} + \frac{1}{6\tau})^{\frac{1}{2}}\right] \quad (9)$$

식(9)의 해가 되는 τ^*를 구하기 위해서는 먼저 τ의 비선형함수인 식(8)이 τ에 대하여 어떠한 특성을 가지는 함수인지를 분석할 필요가 있다. 만약 분석의 결과 $\pi(\tau)$가 τ의 오목함수(concave function)임을 보일 수 있다면 식(9)의 해는 유일할 것이며 이를 발견하는 것도 어렵지 않을 것이다. 이를 위해서 편의상 식(8)을 앞부분의 항과 뒷부분의 항으로 나누어 분석을 시도하여 보기로 하자. 먼저 앞부분의 항을 $F(\tau)$라고 하면 아래와 같다.

$$F(\tau) = \left[Tp - \frac{c(\tau+1)}{2}\right](\alpha - \beta p - \frac{\gamma}{\tau})$$

$F(\tau)$는 T-기간에 걸친 대여업에 의한 총매출액에서 제품의 구입비용을 차감하는 내용을 담고 있다. 그리고 뒷부분의 항을 $B(\tau)$라고 하면 다음과 같다.

$$B(\tau) = -T(h+s)\phi(z^*)\sigma(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{3} + \frac{1}{6\tau})^{\frac{1}{2}}$$

$B(\tau)$는 대여영업을 하는 동안 발생하는 재고유지비 및 재고부족비와 함께 일종의 안전재고와 관련된 비용을 총괄해서 포함하고 있다. 만약에 $F(\tau)$와 $B(\tau)$가 각각 τ의 오목함수임을 보일 수 있다면 $\pi(\tau)$ 역시 τ의 오목함수가 될 것이다.

먼저 $F(\tau)$가 τ의 오목함수인지의 여부를 따져보기로 하자. 이를 위해 $F(\tau)$의 τ에 대한 1차도함수와 2차도함수를 각각 구하여 정리하면

$\frac{dF(\tau)}{d\tau} = -\frac{c}{2}(\alpha-\beta p) + (Tp - \frac{c}{2})\frac{\gamma}{\tau^2}$ 와

$\frac{d^2F(\tau)}{d^2\tau} = -2(Tp - \frac{c}{2})\frac{\gamma}{\tau^3}$를 구하게 된다. 그런데 모형의 설정 과정을 참고할 때 $F(\tau)$로 표현되는 부분의 전반부로부터 $Tp - \frac{c(\tau+1)}{2} \geq 0$이 성립하여야 하므로, $\tau \geq 1$일 때 $Tp - \frac{c}{2} > 0$이 성립한다. 그러므로 $\frac{d^2F(\tau)}{d^2\tau} = -2(Tp - \frac{c}{2})\frac{\gamma}{\tau^3} < 0$이 되고 $F(\tau)$는 τ의 강오목함수(strictly concave function)라는 것을 알 수 있다. 따라서 $F(\tau)$ 부분만을 놓고 보면 τ에 대한 1차조건을 적용하여 $F(\tau)$를 최대화시키는 유일한 τ의 값을 발견하는 것이 가능하다.

〔Proposition 1〕

$F(\tau) = [Tp - \frac{c(\tau+1)}{2}](\alpha - \beta p - \frac{\gamma}{\tau})$를 최대화하는 $\bar{\tau}$는 다음과 같다.

$$\bar{\tau} = \sqrt{\frac{(2Tp-c)\gamma}{(\alpha-\beta p)c}} \tag{10}$$

식(10)에서 보는 것처럼 $\bar{\tau}$는 대여기간에 대한 탄력계수인 γ가 커질수록, 즉 대여수요가 대여기간의 변화에 민감하게 반응하는 경우일수록 길어진다. 이는 식(2)에서 대여기간이 길어질 때 증가하는 수요에 의한 이득이, 식(6)이 포괄하고 있는 확대인자 $n_1(\tau)$에 의한 구입비용 증대의 효과보다 크기 때문인 것으로 판단된다. 또한 $\bar{\tau}$는 대여가격 p에 대한 탄력계수인 β가 커질수록 같이 커지는 특성을 가지고 있음을 알 수 있다. 그리고 대여가격 p가 상승하는 경우에는 길어지고 제품의 구입가격 c가 상승하면 짧아지며, 영업기간 T가 길어지면 아울러 길어지는 성격도 가지고 있다. 나중에 우리는 $\bar{\tau}$가 τ^*의 상한(upper bound)이 됨을 보이게 될 것이다.

다음에는 식(8)의 뒷부분인 $B(\tau)$ 부분이 τ의 오목함수인지 여부를 분석하여 보기로 한다. 우선 이 부분은 $\tau > 0$의 범위에서 항상 음의 값을 가지는 함수임이 분명하다. 먼저 $B(\tau)$의 τ에 대한 1차도함수를 구하여 보자.

$$\frac{dB(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{2}T(h+s)\phi(z^*) \sigma(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{3} + \frac{1}{6\tau})^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{3} - \frac{1}{6\tau^2}) \tag{11}$$

식(11)을 0으로 하는 양의 값의 τ는 $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 그러므로 $0 < \tau < \frac{1}{\sqrt{2}}$인 경우에 식(11)은 항상 양의 값을 가지고, $\tau \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$인 경우에는 항상 음의 값을 가지게 된다. 결과적으로 $\tau \geq 0$의 범위에 국한하여 볼 때 $B(\tau)$는 $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$의 값에서 극댓값을 가진다. 그리고 현실적으로 의미를 가지는 $\tau \geq 1$의 범위에서는 항상 음의 값을 가지면서 τ가 증가함에 따라 감소하는 행태를 보이는 함수이다. 그러나 아직 $B(\tau)$가 τ의 오목함수인지의 여부는 분명하지 않다. 따라서 $B(\tau)$의 τ에 대한 2차도함수를 보면,

$$\frac{d^2B(\tau)}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}T(h+s)\phi(z^*)\sigma(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{3} + \frac{1}{6\tau})^{-\frac{3}{2}} [(-\frac{1}{2})(\frac{1}{3} - \frac{1}{6\tau^2})^2 + (\frac{1}{2} + \frac{\tau}{3} + \frac{1}{6\tau})\frac{1}{3\tau^3}] \tag{12}$$

식(12)를 활용하여 $B(\tau)$의 오목함수 여부에 대한 사실은 다음의 결과로 정리된다.

〔Proposition 2〕 $\tau \geq 1$의 영역에서 $B(\tau)$가 오목함수가 되는 τ의 범위는 다음과 같다.

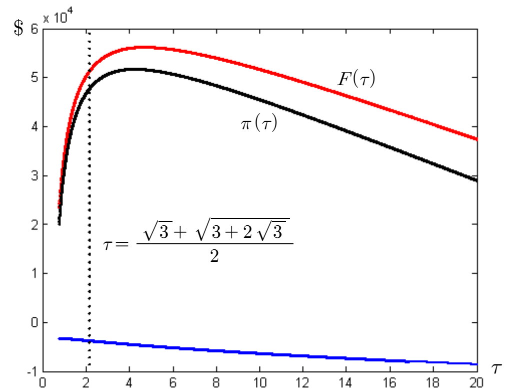
$$1 \le \tau \le \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{2} \approx 2.14 \qquad (13)$$

〈**증명**〉 식(12)에서 $\tau \ge 1$일 때 마지막 항인 $[(-\frac{1}{2})(\frac{1}{3}-\frac{1}{6\tau^2})^2+(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{3}+\frac{1}{6\tau})\frac{1}{3\tau^3}]$을 제외한 부분은 음의 값을 가지는 것이 확실하다.

따라서 식(12)를 음의 값으로 하는 $\tau \ge 1$인 τ의 범위는 $[(-\frac{1}{2})(\frac{1}{3}-\frac{1}{6\tau^2})^2+(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{3}+\frac{1}{6\tau})\frac{1}{3\tau^3}] = -\frac{1}{72\tau^4}(4\tau^4-12\tau^2-12\tau-3)>0$을 만족하는 τ의 범위와 동일하다. 이 때 분자 부분은 $4\tau^4-12\tau^2-12\tau-3=4\tau^4-3(2\tau+1)^2$이 되며, $[2\tau^2+\sqrt{3}(2\tau+1)][2\tau^2-\sqrt{3}(2\tau+1)]$으로 정리된다. 여기서 $[2\tau^2++\sqrt{3}(2\tau+1)]$항은 항상 양의 값을 가지므로 결국 $\tau \ge 1$의 범위에서 $[2\tau^2-\sqrt{3}(2\tau+1)]<0$의 부등식을 풀면 해당하는 결과를 얻게 된다. ■

궁극적으로 〔Proposition 2〕가 의미하는 바는, 함수 $B(\tau)$는 $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{2}$를 경계로 하여 $1 \le \tau < \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{2}$의 범위에서는 2차도함수가 음의 값이 되어 오목함수가 되고, $\tau \ge \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{2}$일 때는 2차도함수가 비음(non-negative)의 값이 되어 볼록함수가 됨을 의미한다. 따라서 $1 \le \tau \le \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{2}$의 범위에서는 $F(\tau)$와 $B(\tau)$가 모두 오목함수이며 결과적으로 식(8)로 표현되는 $\pi(\tau)$도 오목함수가 된다. 그러므로 해당범위에서는 대여업체의 최대화된 이익 π^*와 최적대여기간인 τ^*가 유일하게 존재하는 것이 가능하다.

그러나 $\tau > \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{2}$의 영역에서는 $B(\tau)$가 볼록함수인 것으로 나타나므로 결국 동일영역에서 $\pi(\tau)$가 오목함수임을 보장할 수가 없게 된다. 따라서 식(8)에 대해 1차조건을 적용하여 명시적으로 τ^*를 구하는 것은 기대하기가 어렵다. 하지만 τ^*가 모형에 존재하는 다양한 모수들의 변화에 어떻게 영향을 받게 되는지를 분석하는 것은 여전히 가능하다. 이를 위해 〔Proposition 2〕와 관련된 논의에 근거하여 $F(\tau)$와 $B(\tau)$ 및 대여업체의 이익함수인 $\pi(\tau)$의 모양을 추론하면 일반적으로 〈그림 1〉과 같은 모습을 가지는 것으로 이해할 수 있다.



$\alpha=100,\ \beta=10,\ \gamma=20,\ \sigma=15,\ c=80,$
$p=6,\ T=300,\ s=5,\ h=0.1$

〈그림 1〉 대여업체의 이익함수

이제까지의 논의를 종합하면 다음의 보조정리가 유도된다.

〔**보조정리 1**〕 $\bar{\tau}$는 최적대여기간 τ^*의 상한이다. 즉 $1 \le \tau^* \le \bar{\tau}$가 성립한다. 그리고 $1 \le \tau^* \le \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{2}$이면 τ^*는 유일하게 존재한다.

〈**증명**〉 $1 \le \tau^* \le \bar{\tau}$가 사실이 아니라고 가정하여

보자. 이 때 $\tau^* < 1$의 경우는 논의의 대상이 아니므로 $\tau^* > \bar{\tau}$의 경우만 고려하기로 하자. 식(8)로 표현되는 이익함수 $\pi(\tau)$는 두 함수 $F(\tau)$와 $B(\tau)$의 합계로 이루어져있다. $F(\tau)$는 오목함수로서 $\bar{\tau}$에서 극댓값을 가짐을 알고 있다. 그리고 여기에 더해지는 $B(\tau)$는 $\tau \geq 1$이면 τ가 증가함에 따라 감소하면서 항상 음의 값을 가지는 함수이다. 그러므로 $\tau \geq \bar{\tau}$의 모든 τ에 대하여 $\pi(\tau) \leq \pi(\bar{\tau})$가 성립하며 $\tau^* \geq \bar{\tau}$가 사실이 아니라는 것이 분명하다. 또한 식(12)와 관련된 앞에서 보인 논의로부터 $1 \leq \tau \leq \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{2}$의 범위에서는 $\pi(\tau)$가 오목함수이므로 τ^*가 해당범위에 있다면 유일하게 존재한다는 사실도 명백하다. ■

〔보조정리 1〕을 바탕으로 다음과 같이 τ^*의 구체적인 성격을 도출할 수 있다.

〔보조정리 2〕 다음의 각 조건이 성립하는 경우의 τ^*의 값은 아래와 같다.

(ⅰ) $\bar{\tau} \leq \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{2}$이고 $\left.\frac{d\pi(\tau)}{d\tau}\right|_{(\tau=1)} \leq 0$이면 $\tau^*=1$이다.

(ⅱ) $\bar{\tau} \leq \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{2}$이고 $\left.\frac{d\pi(\tau)}{d\tau}\right|_{(\tau=2)} \geq 0$이면 $\tau^*=2$가 된다.

〈증명〉 (ⅰ)의 경우는 〔보조정리 1〕을 감안하면 실질적으로 $1 \leq \tau^* \leq \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{2}$의 범위가 성립한다. 그런데 $\left.\frac{d\pi(\tau)}{d\tau}\right|_{(\tau=1)} \leq 0$이므로 $\left|\left.\frac{dF(\tau)}{d\tau}\right|_{(\tau=1)}\right| \leq \left|\left.\frac{dB(\tau)}{d\tau}\right|_{(\tau=1)}\right|$이며, $\tau \geq 1$일 때 $\pi(\tau)$는 τ의 감소함수가 된다. 따라서 τ가 최소의 값을 가질 때 $\pi(\tau)$는 최대가 되므로 $\tau^*=1$이 성립한다.

(ⅱ)의 경우도 마찬가지로 $1 \leq \tau^* \leq \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{2}$이다. 그런데 $\left.\frac{d\pi(\tau)}{d\tau}\right|_{(\tau=2)}$ $\left.\frac{d\pi(\tau)}{d\tau}\right|_{(\tau=2)} \geq 0$이므로 $\left|\left.\frac{dF(\tau)}{d\tau}\right|_{(\tau=2)}\right| \geq \left|\left.\frac{dB(\tau)}{d\tau}\right|_{(\tau=2)}\right|$가 된다. 따라서 $\pi(\tau=1) \leq \pi(\tau=2)$가 성립하고 τ는 정수이므로 $\tau^*=2$가 된다. ■

다음에는 관련된 여러 가지 모수들의 변화에 이익함수 $\pi(\tau)$가 어떻게 영향을 받는지 분석하여 보기로 한다. 대표적인 관련 모수로는 재고유지비에 해당하는 h 및 재고부족비용 s, 그리고 단위제품의 구입비인 c를 들 수 있다. 먼저 h와 s에 의한 영향을 살피기로 하자.

〔정리 1〕 단위당 재고유지비 h 또는 재고부족비용 s가 각각 증가하면 τ^*는 짧아진다.

〈증명〉 τ^*는 식(8)의 τ에 의한 1차조건이 만족되는 지점에서 결정된다. 즉, $1 \leq \tau \leq \bar{\tau}$의 범위에서 양의 값을 가지는 $\frac{dF(\tau)}{d\tau}$와, 음의 값을 가지는 $\frac{dB(\tau)}{d\tau}$의 각각의 절댓값이 동일하게 되는 지점에서 결정된다. 그런데 h 또는 s가 각각 증가하게 되면 $F(\tau)$의 도함수에는 아무 영향이 없지만, $B(\tau)$의 도함수는 영향을 받게 된다. 따라서 h 또는 s가 각각 증가함에 따라 $B(\tau)$의 도함수의 절댓값이 기존보다 증가함을 보이게 되면 충분하다. 이를 위해 먼저 $B(\tau)$의 τ에 의한 도함수의 절댓값이 h의 증가함수임을 보이도록 한다. 식(11)을 참조하면,

$$\left|\frac{dB(\tau)}{d\tau}\right| = \frac{1}{2}T(h+s)\phi(z^*)\sigma\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{3}+\frac{1}{6\tau}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6\tau^2}\right) \tag{14}$$

식(14)를 h로 미분하고 편의상 $\Omega=(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{3}+\frac{1}{6\tau})^{-\frac{1}{2}}$라고 하면 그 결과는 $\frac{1}{2}T\phi(z^*)\sigma\Omega+\frac{1}{2}Tz^*(\frac{s-\frac{c}{T}}{h+s})\sigma\Omega$가 된다. 그런데 $\frac{s-\frac{c}{T}}{h+s}>0$이고 $z^*>0$이므로 명백히 이 결과는 양의 값을 가지며, 이는 $B(\tau)$의 도함수의 절댓값이 h의 증가함수임을 나타낸다.

다음에는 s가 증가하는 경우를 분석하기로 한다. 마찬가지로 식(14)를 s로 미분하였을 때 그 결과가 양의 값을 가진다는 것을 보이면 된다. 미분결과는

$$\frac{1}{2}T\phi(z^*)\sigma\Omega-\frac{1}{2}Tz^*(\frac{h+\frac{c}{T}}{h+s})\sigma\Omega$$
$$=\frac{1}{2}T\sigma\Omega[\phi(z^*)-z^*\{(1-\Phi(z^*)\}] \qquad (15)$$

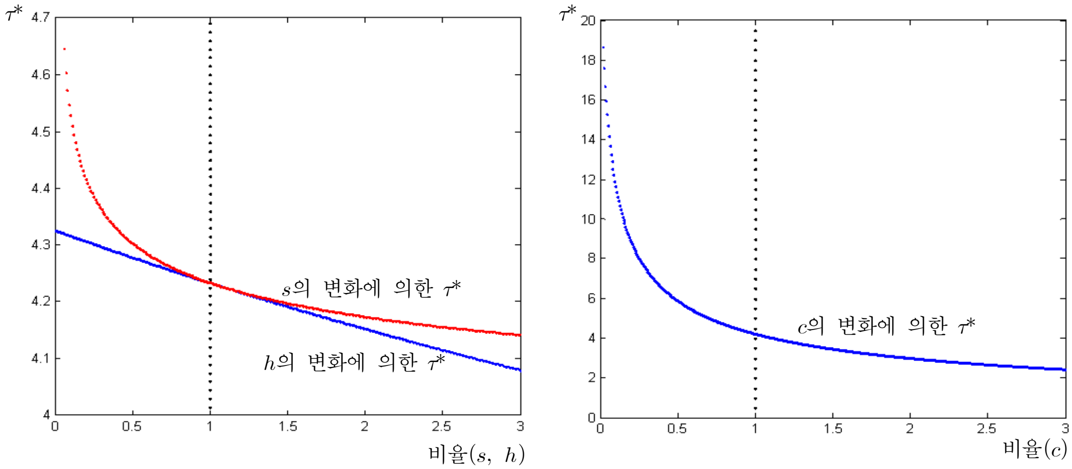
여기서 $\phi(z^*)-z^*[(1-\Phi(z^*)]$가 $z^*>0$일 때 양의 값을 가짐을 보이면 충분하다. 그런데 여기서 $z^*=\Phi^{-1}(\frac{s-\frac{c}{T}}{h+s})$인 사실을 활용하여 $\frac{dz^*}{ds}=\frac{1}{\phi(z^*)}\frac{h+\frac{c}{T}}{(h+s)^2}>0$임을 알고 있다. 즉 s가 증가하면 안전재고에 의한 주문충족의 수준을 나타내는 바로미터인 z^*가 증가한다는 것이다. 그러므로 s의 증가효과를 z^*의 증가효과로 대치하여 $\phi(z^*)-z^*[1-\Phi(z^*)]$의 값이 $z^*>0$일 때 z^*가 증가함에 따라 항상 양의 값을 가짐을 보여주어야 한다. 이를 위해 $\Psi(z^*)=\phi(z^*)-z^*[(1-\Phi(z^*)]$라고 정의하고 $\frac{d\Psi(z^*)}{dz^*}$를 구해보면 $[\Phi(z^*)-1]$이 되는데 이 결과는 항상 음의 값을 가지는 것이 자명하다. 즉 $\Psi(z^*)$는 z^*의 감소함수라고 하는 것이다. 이에 더하여, 주어진 $z^*>0$의 범위에서 $\lim_{z^*\to 0}\Psi(z^*)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}>0$이고, 또한 $\lim_{z^*\to\infty}\Psi(z^*)\geq 0$의 사실이 성립하므로 증명은 완결된다. ■

〔정리 2〕 제품의 구입비 c가 상승하면 $\bar{\tau}$와 τ^*는 짧아진다.

〈증명〉 식(10)으로부터 c가 상승하게 되면 $\bar{\tau}$는 감소하는 것이 명백하다. 또한 c가 상승함에 따라 τ^*에 어떻게 변하는지를 보기위해, $\frac{dF(\tau)}{d\tau}$와 $\frac{dB(\tau)}{d\tau}$에 대한 c의 상승효과를 보자. 먼저 $\frac{dF(\tau)}{d\tau}=-\frac{c}{2}(\alpha-\beta p)+(Tp-\frac{c}{2})\frac{\gamma}{\tau^2}$이므로 이 값은 $1\leq\tau\leq\bar{\tau}$의 범위에서 양의 값을 가지지만, c가 상승하면 감소하는 효과가 나타난다. 그리고 $\frac{dB(\tau)}{d\tau}$를 나타내는 식(11)을 보면, 항상 음의 값을 가지면서 c가 상승함에 따라 $z^*=\Phi^{-1}(\frac{s-\frac{c}{T}}{h+s})$가 감소하여 $\phi(z^*)$가 증가하고, 결과적으로 해당 도함수의 절댓값이 증가하게 됨을 알 수 있다. 결국 c의 증가가 $\frac{dF(\tau)}{d\tau}$와 $\frac{dB(\tau)}{d\tau}$에 미치는 영향을 종합하면 c가 상승하는 경우 τ^*는 짧아진다. ■

〔정리 1〕과 〔정리 2〕는 재고유지비와 재고부족비용 및 구입원가 등이 상승할수록 최적대여기간의 값이 점점 짧아져야 한다는 사실을 보이고 있다. 즉, 식(6) 또는 식(9)로 표현되는 이익함수의 구조상 h나 s 또는 c의 변화에 의한 영향이 수입과 비용에 해당하는 각 부분에서 복합적인 상호작용을 하는 과정을 거쳐서 궁극적으로 τ^*의 값에 어떠한 영향을 미치게 되는지를 규명하고 있다.

〈그림 2〉는 $\alpha=100$, $\beta=10$, $\gamma=20$ 이며, 대여



〈그림 2〉 주요 비용의 변화에 따른 최적대여기간의 변화

가격인 p가 6, 구입가격인 c가 80, 그리고 단위당 재고부족비용 s가 5, 단위기간동안의 재고유지비용 h가 0.1, 수요의 평균인 μ가 33.3, 수요변동의 표준편차인 σ가 15, 그리고 영업기간인 T가 300인 대여산업의 경우에, h나 s 또는 c의 값이 변하게 될 때 최적대여기간이 어떻게 바뀌어야 하는지를 요약하여 보여주고 있다. 즉 현재의 각 변수의 값이 각각 $h=0.1$, $s=5$ 그리고 $c=80$인 경우를 1.0으로 할 때, 각 변수들이 비례적으로 증감하는 경우에 대한 최적대여기간의 변화를 표시하고 있다.

〈그림 2〉에 의하면 최적대여기간은 〔정리 1〕에서 증명한 바와 같이 재고유지비용이 증가 또는 감소하는 변화에 대해서는 거의 선형적인 반비례 형태로 반응하고 있음을 볼 수 있다. 즉 재고유지비용이 증가하면 현재의 최적대여기간을 단축하여야 하고, 반대의 경우에는 최적대여기간을 연장하여야 대여이익을 최대화할 수 있음을 보여주고 있다. 재고부족비용과 제품 구입가격의 경우에도 〔정리 1〕과 〔정리 2〕의 내용대로 최적대여기간이 반응하고 있음을 볼 수 있다. 단, 이 경우에는 해당 비용들이 현재 수준에 비하여 증가할 때보다 감소하는 경우에 최적대여기간의 반응정도가 더욱 예민하다고 하는 차이점이 있다.

Ⅳ. 결론

대여업체의 이익을 결정하는 가장 중요한 두 가지의 의사결정요소를 꼽는다면, 대여가격과 대여기간이라고 할 수 있을 것이다. Tang and Deo (2008)는 본 연구에서 활용한 분석모형을 사용하여 이 두 가지 요소 중에서 최적대여가격을 산정하고 이익을 극대화하는 이슈에 대하여 정리하였다. 그리고 본 연구에서는 (그들이 제시한 이론적 틀에 의하여 또는 시장여건에 의하여) 대여가격이 이미 주어진 상태라고 가정하고, 대여산업 공급사슬의 말단에 있는 대여 소매업체의 입장에서 이익을 극

대화하기 위한 최적대여기간의 특성과 경영 측면에서의 시사점들을 찾아보았다. 이를 위해 대여수요의 크기가 대여기간의 길이에 영향을 받는 일반적인 환경에서 대여업체의 이익함수가 어떠한 특성을 가지는 함수가 될 수 있는지를 먼저 분석하였다.

이 분석을 바탕으로 최적대여기간의 이론적인 상한을 발견하였으며, 대여기간의 함수로서의 이익함수는 대여기간이 특정 수치 이하인 경우에는 오목함수의 특성을 가지지만, 그 이상의 범위에서는 그러하지 못하다는 것을 증명하였다. 또한 이에 근거하여 특수하기는 하지만 최적대여기간이 1 또는 2 단위기간이 되어야 하는 경우의 제반 조건을 유도해내었다.

그리고 대여업의 영업에 큰 영향을 미치는 주요한 경영 변수인 재고유지비용과 재고부족비용 및 제품구입비용 등이 변할 경우 최적대여기간이 어떻게 영향을 받게 되는지를 분석하여 보았다. 구체적으로 재고유지비용과 재고부족비용이 각각 상승하는 경우에는 이에 상응하여 최적대여기간은 지금보다 단축되어야 대여업체의 이익에 유리하다는 것을 밝혀내었다. 또한 제품구입비용이 상승하는 경우에도 최적대여기간은 역시 제품구입비용의 상승 전보다 단축되어야 수익성 제고에 유리하다.

본 연구의 도입 부분에서 지적한 바와 같이 위와 같은 결과들은 기본적으로 해당 대여업체가 특정지역에서 독점적인 지위를 누리고 있는 상황에서 가능하다. 즉, 여러 업체가 동일 지역에서 경쟁하고 있는 상황에서는 위에서 분석한 내용이 더욱 복잡한 상호작용을 거쳐서 나타나게 될 수 있으며, 이는 향후의 연구 과제로 남겨두고자 한다. 또한 이익함수가 복잡한 비선형함수로 유도되면서 이로 인해 최적대여기간을 명시적인 해(closed form solution)로 유도해 내지 못한 것도 본 연구의 한계점으로 지적될 수 있을 것이다.

참고문헌

박해철 (2009a), "수입공유 사업모형과 재고관리," **한국생산관리학회지**, 20, 94-112.

박해철 (2009b), "수요가 불확실한 대여산업의 거래모형," **경영학연구**, 38, 1115-1132.

박해철 · 조재은 (2009), "대여산업 공급사슬의 최적수입공유모형," **한국경영과학회지**, 34, 55-69.

Bell, D., T. Ho, and C. Tang (1998), "Determining Where to Shop; Fixed and Variable Costs of Shopping," *Journal of Marketing Research*, 35, 352-369.

Bernstein, F. and A. Federgruen (1999), "Pricing and Replenishment Strategies in a Distribution System with Competing Retailers," working paper, Department of Economics, Columbia University.

Cachon, G. and M. Lariviere (2004), "Supply Chain Coordination with Revenue Sharing Contracts: Strengths and Limitations," *Management Science*, 51, 30-44.

Carlton. D. W. (1978), "Market Behavior with Demand Uncertainty and Price Inflexibility," *American Economic Review*, 68, 571-587.

Dada, M. and N. Petruzzi (1999), "Pricing and the Newsvendor Problem," *Operations Research*, 47, 183-194.

Gerchak, Y., R. Cho, and S. Ray (2006), "Coordination of Quantity and Shelf-Retention Timing in the Video Movie Rental Industries," *IIE Transactions*, 38, 525-536.

Kramer, K. (2001), "Measuring up." Available at http://www.asiaweek.com.

McCardle, K., K. Rajaram, and C. Tang (2004), "Advance Booking Discount Programs under Retail Competition," *Management Science*, 50, 701-708.

Milkman K., T. Rogers, and M. H. Bazerman (2007), "Highbrow Films Gatfer Dust: Time-inconsistent Preferences and Online DVD Rentals," working paper, 07-099, HBS.

Oster, S. and F. M. Scott Morton (2005), "Behavioral Biases Meet the Market: the Case of Magazine Subscription Prices," *Berkeley Electronic Journal Advances in Economic Analysis and Policy*, 5.

Silver, E. A., D. F. Pyke, and R. Peterson (1998), *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, 3rd. ed., John Wiley.

Tang, C. S. and S. Deo (2008), "Rental Duration and Rental Price under Retail Competition." *European Journal of Operational Research*, 187, 806-828.

Wertenbroch, K. (1998), "Consumption Self-control by Rationing Purchase Quantities of Virtue and Vice," *Marketing Science*, 17, 473-488.

Characteristics of the Optimal Rental Period in Rental Industries

Haechurl Park* · Jae Eun Cho**

Abstract

There have been many studies trying to understand and construct sound theoretical schemes analyzing the characteristics of the rental industries such as DVD rental industry. Most of the researches have concentrated on finding the optimal rental price to maximize the profit of a retail rental company. On the other hand, we observe few efforts to optimize another important managerial factor, which is the rental period. Especially, if the rental demand is affected by the rental price or the rental period, then it is not that simple to solve such problems, and we find some meaningful implications though.

We investigate the characteristics of the optimal rental period which maximizes the profit of a retail rental company, and we produce several managerial implications based on the results. We assume the rental price is already given exogenously and the rental demand is affected by the length of the rental period. In other words, the model assumes the corresponding rental demand increases if the rental period increases. On the other hand, the corresponding rental demand decreases if the rental period decreases.

First, we analyze the shape of the profit function as a function of the rental period, and find that there is a certain upper-bound value for the optimal rental period. Also we find that the profit function is a concave function of the rental period if the rental period exists below a certain threshold, otherwise the concavity cannot be guaranteed. Based on those analyses, we provide some conditions and limitations for the optimal rental period to be a relatively short term such as 1 or 2 periods.

Also, we develop a theoretical scheme which shows patterns of the optimal rental period

* Professor, College of Business Administration, Chung-Ang University
** Doctoral Student, Graduate school of Business Administration, Chung-Ang University

when some important managerial factors such as unit inventory holding cost, unit inventory shortage cost, and unit cost of the product changes, respectively. For instance, if unit inventory holding cost increases, then a manager should make the optimal rental period shorter than the present period to depend their profitability as much as possible. Similarly, if unit inventory shortage cost increases, then a manager should make the optimal rental period shorten either. Finally if the unit cost of the product increases, then a manager also should make the optimal rental period shorten in the same manner.

Key words: rental period, rental industry, profit function, inventory holding cost, shortage cost