

# 파레토-레비 분포에 관한 小考

## - 비대칭 파레토-레비 분포의 모수 추정과 표준화된 누적 확률표의 작성 -

방승욱  
서울대 경영연구소 연구원  
(swbahng@yahoo.com)

본 연구는 실제 주가 수익률 분포를 설명하는 대안으로 인정되어 온 파레토-레비 분포가 비대칭적인 경우에는 모수 추정을 어떻게 할 것인가 하는 점에 대해 논의하였다. 구체적으로는 비대칭 파레토-레비 분포에서의 위치 모수와 분산도의 선정, 그리고 표준화된 파레토-레비 분포의 확률분포 표를 작성하고자 하였다. 본 연구는 이 주제들을 다루면서 실제 분포의 비대칭도를 추정하고 이를 설명하기 위하여 모의실험을 통하여 해결책에 접근하였다. 이 모의실험 결과에 근거하여 비대칭도를 고려한 새로운 분산도 측정치를 이전의 연구와는 다르게 중앙값 절대편차로 선정하였다. 이러한 새로운 측정지표에 따라 파레토-레비 분포의 모집단으로부터 특성지수와 비대칭도 지수를 변화시켜 가면서 난수를 발생시켜 표준화된 비대칭 확률분포 표를 작성함으로써 수익률 분포 연구에 공헌하였다.

### 1. 연구의 동기

주식 수익률 분포 설명시 정규분포의 대안으로 파레토-레비 분포가 여러 학자들에 의해 제안되었다. 이 분야의 전통적으로 잘 알려진 몇몇 연구들을 거론하면 Fama, Roll(1968, 1971), Fielitz, Smith(1972), Hsu, Miller, Wichern(1974), Fielitz, Rozelle(1983) 등의 연구들을 들 수 있으며, 재무론에의 관련 응용 연구로는 Upton, Shannon(1979), Bawa, Elton, Gruber(1979), Matacz(2000), Mantegna, Stanley(2000) 등의 연구를 거론할 수 있다. 이 중 Fama, Roll(1968, 1971)의 연구는 파레토-레비 분포의 여러 모수를 추정하는데 있어서 다양한 방법들을 비교 제시하였고, 실제로 표준화된 파레토-레비 분포의 누적 확률분포 표를 작성함으로써 이 후의 이 분야 연구에 선구적인 역할을 했다. 이후에 발표된 재무론 관련 응용연

구중의 하나인 Bawa, Elton, Gruber (1979)는 안정파레토 분포의 틀하에서 포트폴리오 선택시 위치 모수와 분산도 모수를 수정의 필요성을 언급했다. 이에 비해 최근의 연구인 Matacz (2000)는 절단된 파레토 레비 분포(TLP: truncated Levy process)를 이용하여 이 TLP 분포가 유한한 적률을 갖고 있으며 단기간의 높은 첨도를 설명가능하다는 특성에 근거하여 주가지수의 분포를 설명할 수 있는 대안으로 제시하였다.

그런데 이들의 연구는 파레토-레비 분포를 설명하는데 있어서 주로 대칭적인 경우만을 다루었기 때문에 실제 현실에서 관찰되는 주식 수익률 분포의 비대칭성을 설명하는데 있어서 무리가 있었다. 이 비대칭성의 문제점은 이후의 연구인 Fielitz, Smith(1972)에 의해 지적되고 그 증거가 제시되었다. 이들은 NYSE의 200개 주식의 5년간 일별 수익률에 대하여 검증한 결과 정규분포보다 두꺼운 양극단의 확률밀도, 정규분포보다 높은 첨도의 존

재, 비대칭도의 존재를 확인함으로써 실제 주식 수익률 분포를 설명할 때에 이전의 연구와는 달리 비대칭적인 파레토-레비 분포가 더 적합하다는 주장을 제기하였다.

그러나 이런 비대칭적인 분포가 실제 수익률분포의 설명에 더 적합하다는 주장에도 불구하고 파레토-레비 분포의 차원에서는 비대칭도를 고려한 분포의 모수를 추정하려는 연구가 많이 이루어지지 않았다. Fama, Roll(1968, 1971)의 연구가 이 분야에 관하여 비약적인 발전을 이루었으나 이들은 대칭적인 경우만을 다루었다. 또한 비대칭적 파레토-레비 분포의 현실 적합성을 주장한 Fielitz, Smith(1972)도 정규분포와의 비교를 통해 비대칭적인 파레토-레비 분포의 모수 추정 방법의 필요성을 역설하는 정도로 그쳤다. 이 연구들의 결론은 비대칭적 파레토-레비분포를 지지하는 방향으로 이루어졌다고 볼 수 있는데, 이후의 연구중의 하나인 Chobanov, Mateev, Mitnik, Rachev(1996)는 불가리아 화폐의 달러 환율에 대한 분포를 설명시 여러 대체적인 분포를 통하여 실험을 한 결과 비대칭적 파레토 분포( $\alpha$ -stable asymmetric distribution)가 가장 잘 적합된다는 결론을 제시하였다. 전반적으로 이 비대칭성의 문제들을 구체적으로 다룬 연구들을 찾기 힘들며 이는 국내의 경우도 마찬가지이다. 예를 들어 이 분야에 관한 연구를 집약한 가장 최근의 연구중의 하나로 볼 수 있는 Mantegna, Stanley(2000)의 연구에도 파레토-레비 분포의 비대칭적인 경우에 관한 구체적인 설명이 충분치 않은 실정이다.

본 연구는 이러한 점을 감안하여 비대칭적인 경우를 포함하는 일반적인 파레토-레비 분포의 특성에 관하여 생각해 보려고 한다. 구체적으로는 첫째, 중심화 경향의 통계량으로서 평균이외에 중앙

값, 절단된 평균등을 사용하여 비대칭도 존재시 중심화 경향치로서 이들 통계량간에 어느 지표가 더 효율성이 있는가를 모의실험을 통해 탐색한다. 둘째는 분산도에 대한 측정치로서 첫 번째 단계의 모의 실험 결과에 의존하여 비대칭 분포에 적절한 분산도 지표를 찾는다. 셋째는 이들 통계량을 기초로 하여 비대칭도를 고려한 경우 표준화된 파레토-레비 분포 표를 작성한다.

본 연구는 다음과 같이 진행된다. 제 2장에서는 분포의 비대칭도 측정시의 문제점을 지적하고 비교 분석을 위하여 실제 수익률 자료의 비대칭도를 측정한다. 제 3장에서는 이 자료로부터 비대칭 분포의 위치 모수와 분산도 지표의 측정에 관하여 논의하고, 이를 근거로 표준화된 파레토-레비 분포의 누적 확률분포표를 작성한다. 논문의 결론은 제 4장에 제시된다.

## II. 연구의 문제점 파악

### 2.1 분포의 비대칭도의 측정

분포의 비대칭도는 두가지 방식으로 측정할 수 있다. 하나는 적률이 유한한 경우이고, 다른 하나는 적률이 무한한 경우이다.

#### 2.1.1 적률이 유한한 경우

적률이 유한한 경우의 비대칭도  $M_3$ 는 식 (2.1)과 같이 표현된다.

$$M_3 = E[X - E(X)]^3 \quad (2.1)$$

이 식에서  $X$ 는 확률변수,  $E(X)$ 는 기대값을 나타낸다. 총 관찰치의 수가  $T$ 개라 하면 위 식(2.1)은 다시 식 (2.2)와 같이 표시할 수 있다. 이 때, 이  $m_3$  지표를 원래의 비대칭도(raw skewness)라 한다.

$$m_3 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T [X_i - (\frac{\sum_{i=1}^T X_i}{T})]^3 \quad (2.2)$$

그런데 이 지표를 실증분석에 이용할 경우는 척도 크기(scale)의 문제로 인하여 실제로는 식 (2.3)과 같은 상대적인 비대칭도(relative skewness)로 측정한다.

$$RS = \frac{m_3}{S^3} \quad (2.3)$$

여기서,  $S$ 는 표준편차를 의미한다. 결국, 식 (2.3)은 분포의 원래 비대칭도를 분산도에 의하여 표준화시킨 개념이 되며, 또한 척도 크기에 있어서 다른 분포의 비교에 이용할 수 있게 된다. 이 (2.3)식의 지표는 실제 사용자 자유도를 조정하여  $\frac{T^2}{(T-1)(T-2)} \frac{m_3}{S^3}$ 로 측정한다. 그런데 이 지표는 개념적으로 봤을 때 분포의 2차 이상의 적률이 유한하여야 한다는 제약조건이 존재하므로 무한대의 분산을 갖는 분포나 3차 이상의 적률이 무한일 경우는 이 지표는 합당치 않게 된다.

### 2.1.2 적률이 무한한 경우

따라서 분포의 2차 이상의 적률이 정의되지 않는 파레토-레비 분포와 같은 경우는 이 비대칭도의 측정을 다른 방식으로 하고 있다. 이 방식은 식 (2.4)와 식 (2.5)에 의하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pr(X > X^*) &= \frac{(X^*)^{-\alpha}}{V_1}, & X^* > 0 \\ \Pr(X < X^*) &= \frac{(X^*)^{-\alpha}}{V_2}, & X^* < 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

여기서,  $\Pr$ 은 확률,  $\alpha$ 는 파레토-레비 분포의 특성지수,  $V_1, V_2$ 는 상수를 나타낸다. 이 때 분포의 비대칭도를 다음과 같이 정의한다.

$$\beta = \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2} \quad (2.5)$$

이 적률이 정의되지 않는 경우의 비대칭도를 정의한 식 (2.5)에서 이  $\beta$  지표는 어떠한 적률에도 의존하고 있지 않다는 사실을 알 수 있다. 이 식으로부터 비대칭도가 전체 분포 중 극단적으로 큰 관찰치와 작은 관찰치 사이의 차가 두 관찰치의 합에 대한 비율이란 사실을 또한 파악할 수 있다. 다시 말하면,  $V_1$ 은 분포의 중심화 경향으로부터 우측으로 상당히 떨어진 관찰치의 수로 측정되며,  $V_2$ 는 좌측으로 일정거리 이상 떨어진 관찰치의 수로 측정된다. 이 값  $\beta$ 의 범위는  $-1 \leq \beta \leq +1$ 의 범위를 갖으며,  $\beta$ 가 (+)인 경우는 분포가 우측으로 긴 꼬리를 갖고 있으며,  $\beta$ 가 (-)인 경우는 좌측으로 비대칭인 분포를 이루고 있음을 나타낸다.

### 2.2 파레토-레비 분포의 정의

파레토-레비 분포의 특성함수의 일반적인 형태는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \ln \varphi(q) &= \\ i\mu q - \gamma |q|^\alpha & [1 - i\beta \frac{q}{|q|} \tan(\frac{\pi}{2} \alpha)], \quad [\alpha \neq 1] \\ i\mu q - \gamma |q| & [1 + i\beta \frac{q}{|q|} \ln(q)], \quad [\alpha = 1] \end{aligned}$$

여기서,  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $\gamma$ 는 (+)의 척도 요인,  $\mu$ 와  $q$ 는 실수,  $i$ 는 복소수,  $\beta$ 는 -1에서 +1까지의 값을 갖는 비대칭도 모수이다. 이 파레토-레비 분포의 분석적 형태는  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 특정한 수치에 관하여만 알려져 있다.(Mantega, Stanley, 2000) 즉, 이 분포는  $\alpha=2$ 일 경우는 정규 (Gaussian) 분포,  $\alpha=1$ ,  $\beta=0$ 일 경우는 로렌쯔 (Lorentzian, 또는 Cauchy) 분포,  $\alpha=1/2$ ,  $\beta=1$ 일 경우는 Levy-Smirnov 분포가 되는 것으로 알려져 있다. 특히  $\alpha < 2$ 인 경우에는 분산이 무한대가 된다.

이 파레토-레비 분포는 재무 관련 모형을 세울 때에 여러 특성을 갖고 있는데, 그 중의 하나는 이 분포가 addition과 scale에 대하여 안정적(stable)이라는 사실이다. 이는 예를 들어 1일, 1주, 1개월 주식수익률의 분포를 관찰해도 동일한 형태를 보인다는 사실이다. 이런 특성에도 불구하고 파레토-레비 분포의 비조건적인 분포는 실제 금융자산 수익률을 적합시키는데 그리 성공적이지 못하다는 평가를 받고 있다. 이는 대칭적인 경우만을 다루었으며, 또한 모수 추정시의 신뢰성이 떨어지는 조악한 방법을 적용시켰기 때문이라고 주장되고 있다.(Rachev, Mitnik, 2000)

### 2.3 실제 추정과 추정시의 문제점

파레토-레비 분포를 상정한 본 연구가 실제 분석시 행한 비대칭도의 추정은 식 (2.6)과 같이 이루어졌다.

$$\hat{\beta} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \quad (2.6)$$

여기서,  $v_1 = \Pr(X_i > X^{*+})$ ,  $v_2 = \Pr(X_i < X^{*-})$ ,  $X^{*\pm} = [X \text{의 중심화 경향치}] \pm k[X \text{의 분산도}]$ ,

$k$ 는 (+)의 상수를 나타낸다. 이 지표에 의하여 1989년부터 1999년까지의 한국증권거래소에 상장된 기업 50개 종목의 실제 주별 주식 수익률을 이산적, 연속적 수익률로 구분하여 비대칭도를 측정 한 결과가 먼저 <표 2-1>에 제시되어 있다. 비교 분석의 목적으로 <표 2-2-1>과 <표 2-2-2>가 또한 제시되어 있다. 이 <표 2-2-1>과 <표 2-2-2>에 의하면 2차 이상의 적률이 존재하지 않는다는 가정 하에 측정한 비대칭도  $\beta$ 의 분포는 이산적 수익률의 경우 98%, 연속적 수익률의 경우는 88%가 0이상의 수치를 보이고 있다. 가장 낮은 경우의 비대칭도  $\beta$ 의 수치는 (-).08000과 -.18367로 각각 산출되었다. 구간별 분포는 두 경우 모두  $\beta \leq .60$ 의 구간에 약 100%가 집중되어 있었다.

그런데 주의할 점은 이 식 (2.6)에 의하여 파레토-레비 분포의 비대칭도를 측정할 경우도 문제점이 전혀 없는 것은 아니라는 점이다. 첫째는 변수  $X$ 의 중심화 경향을 나타내는 통계량으로서 어느 지표를 사용할 것인가 하는 점이다. 둘째는 분산도를 어느 지표를 사용하여 측정할 것인가 하는 점이다. 지금까지는 첫번째 문제점에 대하여는 대칭적인 경우는 평균을 이용하는 방법이 일반적이는데 이에 대한 대안으로서 중앙값과 절단된(truncated) 평균이 제시되고 있다. 두 번째 문제점에 대하여는 자료의 분산도의 측정은 일반적으로 표준편차가 이용되고 있으나 파레토-레비 분포의 경우에서처럼 2차 이상의 적률의 유한성이 인정되지 못하는 경우는 적당한 지표가 되지 못한다. 그러므로 이에 대한 대안으로서 다른 분산도 추정지표가 제시되어야 하는데, 보통 평균절대편차(MAD: mean absolute deviation)와 사분위수 범위(interquartile range)가 제시되고 있다. 이 지표들은 극단적인 관찰치의 값에 덜 민감하여 비대칭적인 분포의 경우나 무한

분산의 분포의 경우에 유용한 것으로 생각되고 있다.

본 연구는 모의실험을 통하여 이 문제점들을 심도 있게 다루고자 한다. 첫째는 중심화 경향의 지표인 위치 모수로는 어느 통계량이 효율적인가, 둘째 비대칭 분포의 경우 어느 지표가 분산도 지표로 적절한가, 셋째는 첫째, 둘째 결과에 근거하여 표준화된 파레토-레비 분포의 누적 확률분포표를 작성하고자 한다.

## 2.4 연구 자료

본 연구에서는 연구대상으로 두 개의 표본 집단을 구성하였다. 표본으로 선정된 종목은 50종목이었다. 자료는 한신평 데이터 베이스에서 자료를 추출하였는데, 선정 기준은 1989년 1월 초부터 1999년 12월 말까지의 수익률 자료가 있는 주식 중에서 제한을 하고(판단 추출), 종목 code별 순서대로 분류된 상태에서 가능하면 매 10번째 주식을 선정하였다.(체계적인 추출) 따라서 검증에 사

〈표 2-1〉 비대칭도  $\beta$ 의 측정

1989.1.11부터 1999년 12월 24일까지의 50개 종목 571개의 주별 수익률에 대하여 계산한 결과이다.

회사명	이산적수익률	연속적수익률	회사명	이산적수익률	연속적수익률
신라교역	.04000	.22727	한보철강	.37255	.12727
남양유업	.53191	.37255	연합철강	.34694	.12727
대림수산	.45090	.25490	세아 제강	.28889	.19048
동양제과	.36585	.23077	동양강철	.23404	.086957
샘표식품	.21569	-.019608	삼화 왕관	.17391	.061224
범양식품	.057143	.00000	삼표 제작용	.43470	.15000
동일방직	.22449	.04000	삼성전기	.50000	.33333
신성무역	.33333	.24444	오리온전기	.15556	.090909
중앙염색	.11111	.066667	삼화 콘덴서	.40000	.21951
부 흥	.41463	.33333	기아자동차	-.08000	-.18367
동일고무	.15556	-.04000	오리엔트	.44000	.32000
금호타이어	.45833	.13208	벽산개발	.14286	.024390
신호제지	.30909	.056604	코오롱건설	.38889	.18919
세 품	.44681	.34783	현대자동차	.36585	.14894
수출포장	.44681	.24444	경방	.060606	-.014925
건설화학	.11111	-.045455	현대종합상사	.31707	.20000
조흥화학	.31148	.15152	미도파	.13793	.017544
LG 상사	.47368	.38462	대한항공	.42857	.31818
진양	.39100	.27770	조흥은행	.12821	.00000
한일약품	.39535	.27660	서울은행	.13208	.020408
한독약품	.37778	.22449	대우증권	.42857	.33333
한국화장품	.17073	-.081081	LG증권	.55102	.45455
한국타이어	.45833	.13208	해동화재	.38776	.33333
내셔널플러스	.33333	.10000	삼성전관	.35135	.17949
아시아시멘트	.44681	.22449	녹십자	.25926	.13208

〈표 2-2-2〉 분포의 비대칭도  $\beta$ 의 측정 (연속적 수익률)

비대칭도는 1989년 1월초-1999년 12월까지의 50개 종목의 주식 주별 수익률인 571개의 자료에 대하여 식 (2.6)  $\hat{\beta} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}$  을 적용하여 산출하였으며 k는 2.5로 설정하였다. 여기서,  $v_1 = \Pr(X_i > X^{**}), v_2 = \Pr(X_i < X^{*-}), X^{*\pm} = [X$ 의 중심화 경향치]  $\pm k[X$ 의 분산도], k는 (+)의 상수를 나타낸다.

$\beta$ 분포의 특성치	평균	표준 편차		최소 값	최대 값
	0.31249	0.14026		-0.08000	0.55102
$\beta$ 분포의 비율(%)		비대칭도 < 0		비대칭도 $\geq 0$	
		2		98	
비대칭도 $\beta$ 의 구간별 분포(%)	$0 \leq \beta \leq .19$	$.20 \leq \beta \leq .39$	$.40 \leq \beta \leq .59$	$.60 \leq \beta \leq .79$	$.80 \leq \beta \leq 1.00$
	26	42	32	0	0

〈표 2-2-1〉 분포의 비대칭도  $\beta$ 의 측정 (이산적 수익률)

비대칭도는 1989년 1월초-1999년 12월까지의 50개 종목의 주식 주별 수익률인 571개의 자료에 대하여 식 (2.6)  $\hat{\beta} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}$  을 적용하여 산출하였으며 k는 2.5로 설정하였다. 여기서,  $v_1 = \Pr(X_i > X^{**}), v_2 = \Pr(X_i < X^{*-}), X^{*\pm} = [X$ 의 중심화 경향치]  $\pm k[X$ 의 분산도], k는 (+)의 상수를 나타낸다.

$\beta$ 분포의 특성치	평균	표준 편차		최소 값	최대 값
	0.16228	0.14027		-0.18367	0.45455
$\beta$ 분포의 비율(%)		비대칭도 < 0		비대칭도 $\geq 0$	
		12		88	
비대칭도 $\beta$ 의 구간별 분포(%)	$0 \leq \beta \leq .19$	$.20 \leq \beta \leq .39$	$.40 \leq \beta \leq .59$	$.60 \leq \beta \leq .79$	$.80 \leq \beta \leq 1.00$
	56	42	2	0	0

용된 주식 수익률의 선택은 1989년 1월 11일부터 1999년 12월 24일까지의 571개의 주별 수익률을 사용했다. 표본의 구분은 수익률의 계산을 이산적 수익률로 하였는가 아니면 연속적 수익률로 하였는가에 따라 분류하였다. 첫 번째 표본은 이산적인 수익률을 사용하였다. 이 자료에 따르면 주별 수익률의 계산은 수요일 증가와 직전 수요일 증가에 의하여 구했으며 그 사이의 거래일이 몇 일 인지의 여부와 관계없이 수요일에서 수요일까지를 1주로

인정하고 만약 수요일이 비 거래일인 경우는 그 이전의 가장 마지막 거래일의 자료를 이용하였다. 두 번째 표본은 이산적 수익률을 변환시켜 연속적 수익률로 만든 다음에 사용하였다.

### III. 모의실험과 그 결과

#### 3.1 비대칭 분포의 위치 모수의 측정

3.1부터 3.3에서는 파레토-레비 분포의 특성지수  $\alpha$ 와 비대칭도  $\beta$ 를 이용하여 Fama, Roll (1968)의 방법을 수정하여 분포를 판단할 수 있는 표를 최종적으로 작성하려고 한다. 그 목적은 표준화된 변수의 값을 통하여 실제 주식 수익률 자료의 분포가 어떠한 특성을 가진 파레토-레비 분포에 가까운 분포를 하고 있는지를 알기 위해서이다. 이를 위해 먼저 위치 모수에 대하여 논의를 한다.

일반적으로 표준화한 변수는  $z = \frac{(X - \delta)}{c}$  를 가리킨다. 여기서  $X$ 는 파레토-레비 분포의 변수를 나타내고,  $c$ 는 척도(scale)를 나타내는 모수,  $\delta$ 는 위치 모수를 표시한다. 예를 들자면 정규분포 변수의 경우 표준화시킬 때  $\delta$ 는 평균,  $c$ 는 표준편차로 생각할 수 있다. 위치 모수에 대한 측정도  $\delta$ 는 보통 0으로 놓는데, 이는 분포가 대칭일 경우에는 합당한 지표라 볼 수 있고, Fama, Roll (1968)도 분포가 대칭적인 경우는 이 방식을 선택했다. 그러나 분포가 비대칭적이면 이 위치 모수  $\delta$ 가 적절한 중심화 경향치가 아닐 가능성이 존재한다. 이에 대한 대안으로서 본 연구는 평균이외에도 이를 수정하여 절단된 평균들과 중앙값(median)으로 측정하였고, 이 통계량들에 대한 표준편차를 구하여 효율성<sup>1)</sup>을 비교하였다. 이 결과가 <표 3-1-1>

과 <표 3-1-2>에 제시되어 있다.

이들 표들은 일반적인 파레토-레비 분포에서 비대칭도를 변화시켜 가면서 중심화 경향을 나타내는 위치 모수의 지표로 어느 지표가 효율성이 높은지 모의실험을 한 결과이다. 모의실험시 1회 발생하는 자료의 수를 571개로 하고 IMSL로부터 3,000회를 발생시켜 반복 실험하였다. 위치 모수로 선정된 중심화 경향치는 평균, 중앙값, .75 절단된 평균, .90 절단된 평균이었다. 이 여러 위치 모수의 측정치중에서 어느 측정치가 효율성이 가장 높은가, 즉 분산도가 가장 낮은가를 표본 통계량의 표준편차, 절단된 범위로 측정하였다. 측정결과를 <표 3-1-1>에서 보면 일반적인 파레토-레비 분포의 대부분의 경우인  $1.0 \leq \alpha \leq 1.9$ 에 있어서 중앙값이 평균이나 절단된 평균들보다 효율성 측면에서 더 우월한 측정치로 밝혀졌다. 이 결과는 비대칭적인 경우는 물론이고 예상과는 달리 대칭적인 분포를 포함해서 거의 모든 경우에 있어서 동일하게 성립하였다. 이에 비해 평균이 중앙치보다 더 효율성이 우월했던 경우는 <표 3-1-1>에서는 ( $\alpha=1.9, \beta=0.75$ )와 ( $\alpha=1.9, \beta=1.00$ )의 두 경우에 불과했고, <표 3-1-2>에서는  $\alpha=1.9$ 인 경우에 동일한 특성이 성립하였다.

#### 3.2 비대칭 분포의 분산도 측정

분산도의 지표에 관하여 파레토-레비 분포의 경우 분산이 정의되지 않아 표준편차를 사용하지 못하므로, Fama와 Roll(1968)은 분산도 모수로

1) 효율성의 측정은 일반적으로 모수의 추정치  $\theta_1$ 가  $\text{Var}(\theta_1) < \text{Var}(\theta_2)$ 이면  $\theta_1$ 가  $\theta_2$ 보다 효율성 측면에서 더 우월하다고 한다. 문제는 실제로 검증대상으로 사용된 파레토-레비 분포의 특성지수  $\alpha$ 가 2보다 작은 경우는 2차 이상의 절편이 존재하지 않아 분산을 정의할 수 없다. 효율성의 판단기준을 절단된 범위(truncated range)인 .99, .95, .90, .80의 범위로 일차적으로 측정된 후에 모집단에 분산이 정의되지 않더라도 추출된 표본에는 분산이 존재할 수 있으므로 표준편차로도 측정하였다. 본 논문에서는 결과해석에 큰 차이가 없었기 때문에 표준편차와 .90 절단된 범위로 효율성을 측정된 경우만 제시하였다.

(표 3-1-1) 비대칭도를 포함한 일반적 파레토-래비 분포의 위치모수의 효율성의 비교(표준편차)

이 난수발생을 통한 모의실험은  $\alpha$ ,  $\beta$ 의 수치를 변화시켜 가면서 1회에 571개의 자료를 3000회\* 반복하여 통계량의 효율성을 비교하였다

$\beta$	$\alpha$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$\beta = 0.0$											
중앙값	.065401	.069224	.0701915	.071136	.072739	.0727588	.0722333	.0746698	.0725722	.0738558	
평균	57.03524	9.25792	3.747688	1.180643	1.95584	.5251245	.8250197	.5813709	.1145157	.0767176	
.75 평균	94.82672	7.49776	5.146934	1.068896	.867450	.5028844	1.130633	.3473867	.132997	.1725718	
.90 평균	41.74947	8.39568	3.710889	3.743638	.807675	1.115885	.3931268	.2410832	.2785795	.0808499	
$\beta = 0.25$											
중앙값	.069408	.071391	.071489	.0724773	.072353	.0724298	.0743198	.0741572	.0741693	.0748502	
평균	337.3338	.753024	5.53187	2.140512	.755951	.7180074	.5040367	.2199723	.1688294	.0983549	
.75 평균	336.4674	24.9156	5.00117	4.545223	.701588	.9335862	.3530936	.3233453	.1290852	.0933826	
.90 평균	226.1404	24.0801	11.49856	9.651204	.659405	.3989843	.1694073	.1666728	.1203219	.0765135	
$\beta = 0.50$											
중앙값	.077713	.077107	.0772719	.0755573	.0743219	.0736668	.0735205	.0738833	.0747032	.0743504	
평균	100.9613	30.2028	4.154206	1.167731	.5740524	.4628826	.3391289	.1387219	.1004944	.1021932	
.75 평균	154.0632	12.2364	4.277123	1.473539	.6829409	.9534342	.5722033	.1878933	.1316895	.0865652	
.90 평균	40.7687	.278595	4.285512	1.762927	.7202258	.5567745	.3744516	.1659370	.1363873	.0849646	
$\beta = 0.75$											
중앙값	.092118	.0859547	.082667	.0803021	.0769763	.0756497	.0749660	.0732615	.0760369	<b>.0753809**</b>	
평균	140.8202	16.5051	2.92596	1.193443	1.070078	.4926587	.2081923	1.286411	.0961565	<b>.0740350</b>	
.75 평균	183.6659	5.17802	2.47225	1.641719	.6917123	.4170520	.2169667	.2224845	.1107588	.0850329	
.90 평균	29.9938	11.3275	2.84754	1.762927	.7320963	.3265840	.5245603	.1550995	.1390616	.1057516	
$\beta = 1.0$											
중앙값	106719	.094794	.091284	.0850483	.0829565	.0796872	.0767172	.0766095	.0754197	<b>.0744119**</b>	
평균	42.1765	3.74768	3.25555	.9775578	.4825618	.2936518	.1815989	1.268718	.0923071	<b>.0718180</b>	
.75 평균	95.9984	16.26245	4.05104	1.409419	.659676	.3440434	.2057110	.1427058	.1068774	.0836148	
.90 평균	50.0911	9.05182	2.53065	1.338140	.5638193	.3157360	.1903194	.1331800	.3121441	.0762596	

\* 충분한 수의 난수를 발생시켜 신뢰성을 높이고 Fama, Roll(1968)의 연구와 비교가능성을 높이기 위해 회수를 조정하였다.

\*\* 평균의 효율성이 중앙값의 효율성보다 우월한 경우.

〈표 3-1-2〉 비대칭도를 포함한 일반적 파레토-라비 분포의 위치모수의 효율성의 비교(.90 범위)

이 난수발생을 통한 모의실험은  $\alpha$ ,  $\beta$ 의 수치를 변화시켜 가면서 1회에 571개의 자료를 3000회\* 반복하여 통계량의 효율성을 비교하였다

$\alpha$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$\beta = 0.0$										
중앙값	.212572	.227968	.2290930	.2373115	.2399640	.2404487	.2395731	.2477009	.2411630	.2434913**
평균	12.02687	6.10174	3.105173	1.805044	1.132478	728.1499	5235574	.3932564	.2917905	.2348098
.75 평균	13.67833	5.78166	3.073834	1.761086	1.206156	.8280041	.6023775	.4473767	.3469651	.2712945
.90 평균	11.76113	5.85819	3.158813	1.783546	1.109389	.7764564	.5432991	.3901079	.3122240	.2493477
$\beta = 0.25$										
중앙값	.228450	.231361	.2364140	.2350585	.2381258	.2394735	.2448493	.2433958	.2442756	.2448100**
평균	12.46329	5.762914	3.15423	1.611417	1.195006	.7697321	.5387909	.4013173	.2930681	.2436662
.75 평균	13.38229	6.295954	3.314506	1.779083	1.213299	.8149481	.5910835	.4526819	.3493677	.2742749
.90 평균	13.66782	5.425476	3.113407	1.803926	1.179407	.7505899	.5327476	.3976631	.3110506	.2473643
$\beta = 0.50$										
중앙값	.2564107	.2524813	.2598972	.2507992	.2474614	.2400261	.2411188	.2476556	.2498202	.2461566**
평균	12.71545	6.093036	3.056170	1.776196	1.065447	.7383991	.5407902	.3900608	.3051168	.2348207
.75 평균	13.60395	6.295954	3.327682	1.891885	1.145497	.7949463	.5989100	.4176816	.3417748	.2659483
.90 평균	13.10912	3.122240	3.176742	1.839929	1.308167	.7924569	.5726419	.4046772	.3253343	.2481277
$\beta = 0.75$										
중앙값	.3005653	.2834404	.2720299	.2674529	.2535946	.2445821	.2438940	.2428983	.2468350	.2515141**
평균	13.18611	5.712407	3.070421	1.896758	1.154838	.8160452	.5188540	.4136415	.3015473	.2340851
.75 평균	12.35456	6.252634	3.292725	1.994303	1.277675	.7991101	.5830247	.4516939	.3420262	.2616081
.90 평균	13.66398	5.696021	3.337135	1.883061	1.097713	.7947614	.5662715	.4179357	.3305342	.2528166
$\beta = 1.0$										
중앙값	.3503168	.3148726	.3014608	.2761977	.2712524	.2640105	.2530420	.2523282	.2491296	.2449586**
평균	15.45370	3.105173	3.281249	1.805088	1.144788	.7953233	.5586990	.4107812	.3014247	.2379166
.75 평균	16.23226	7.397286	3.689081	1.955674	1.237049	.8947773	.6069146	.4350170	.3544003	.2720291
.90 평균	14.83773	6.533384	3.315652	1.950840	1.184916	.8051413	.5684629	.4218337	.3229609	.2496340

\* 충분한 수의 난수를 발생시켜 신뢰성을 높이고 Fama, Roil(1968)의 연구와 비교가능성을 높이기 위하여 회수를 조정하였다.

\*\* 평균의 효율성이 중앙값의 효율성보다 우월한 경우.

$c = \frac{1}{2} \left[ \frac{(X_{0.72} - X_{0.28})}{0.827} \right]$ 로 측정하였다. 이 분산도

지표  $c$ 는 관찰치가  $T$ 개 있을 경우 이를 크기 순서로 나열했을 때,  $(T+1)$ 번째 오는 자료를  $X_f$ 로 하여 측정하였다. 또 이들은 이 지표  $c$ 에 대한 대안으로서 평균절대편차(MAD: Mean Absolute Deviation)도 제시하였는데, 두 지표의 통계적 효율성을 비교한 결과  $\alpha = 2.0$ 인 경우에 가까워지는 경우를 제외하고는  $c$ 가 더 효율적이라고 주장하였다. 그런데 이 주장은 모두 분포가 대칭적인 경우에 해당하는 결과였다.

이 때 부각되는 의문점은 본 연구의 관심인 파레토-레비 분포의 비대칭적인 경우에도 이 결과가 그대로 성립할 것인가 하는 점이다. 따라서 앞의 3.1의 논의에서 비대칭도를 포함하는 일반적인 파레토-레비 분포의 위치 모수에 관한 모의실험 결과를 토대로 하여 새로운 지표를 생각해 볼 수 있다. 새로운 지표로서 자료의 분산도를 평균절대편차의 개념을 수정하여, 중앙값 절대편차(MeAD: Median Absolute Deviation =  $\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T |X_i - \text{Median}(X_i)|$ )로 측정하고자 한다. 그 이유는 <표 3-1-1>과 <표 3-1-2>에서 나타난 바와 같이 특성지수  $\alpha$ 가 2.0, 즉 정규분포에 근사하는 경우를 몇 가지 제외하고는 효율성 판단기준을 표본 통계량의 표준편차와 .90 절단된 범위<sup>2)</sup>로 측정했을 경우 중앙값의 효율성이 평균보다 더 우월하다는 결과를 고려하였기 때문이다. 그러므로 분산도가 중심화 경향치로부터 떨어진 정도를 측정한다는 의미에서 이 지표를 사용한다.

### 3.3 표준화된 파레토 분포표의 작성

대칭적인 파레토-레비 분포표를 표준화시켜 작성하는데 있어서 Fama, Roll(1968)은 파레토-레비 분포로부터 난수를 발생시켜  $z_f = \frac{(X_f - X_{1-f})}{2c} = (0.827) \left[ \frac{(X_f - X_{1-f})}{(X_{0.72} - X_{0.28})} \right]$ 으로 그 변수들을 표준화시켰다. 여기서  $z_f$ 는 특성지수  $\alpha$ , 비대칭도 지수  $\beta$ , 분산도 지수  $c$ 의 값을 갖고 있는 표준화된 파레토-레비 변수의  $f$  fractile에 해당하는 값이다. 따라서 실제 자료들로부터  $z_f$ 의 값을 구한 후에 진실한 파레토-레비 분포로부터 작성된 표로부터 특성지수  $\alpha$ 의 값을 추정할 수 있다.  $f = F(\alpha, z_f, \beta = 0.0)$ 의 관계성에서  $f$  fractile의 값과 자료에서 구한  $z_f$ 의 값으로부터 역함수적 관계성을 이용하여  $\alpha_f = G(f, z_f) = F^{-1}(f, z_f)$ 을 구하여 추정할 수 있다. 이 과정에서 표준화된 변수  $z_f$ 는 위치 모수가 0, 분산도 모수가 1이 되는데 이  $z_f$  변수의 분포는 양 극단 부분의 확률이  $\alpha$ 의 수치가 변화함에 따라 민감하게 변화하는 성질이 있다. 이 특성을 이용하여 실제 추정된  $z_f$ 와 변화하는  $\alpha$  값을 비교하여,  $\alpha$ 의 선형 근사적인 값을 추정할 수 있다. 이 방식이 Fama, Roll(1968)가 분포의 특성지수를 추정한 논리이다.

본 논문은 이 방식을 응용하여 비대칭도가 존재하는 파레토-레비 분포의 표준화된 누적확률 분포표를 작성하고자 한다. 이를 위해 먼저 변수를 표준화시켜야 하는데, 분산도를 표시하는  $c$ 가 대칭적인 가정 하에서만 유용한 지표이므로, 본 연구는 MeAD로 분산도를 측정하여 변수를 표준화시켰다.

2) .90 절단된 범위(truncated range)이란 양 극단의 5%씩의 자료를 제거한 후에 나머지 90%의 자료를 갖고 측정된 범위개념이다.

구체적인 적용은,  $z_f = \frac{(X_f - X_{1-p})}{2c}$  로 하지 않고,  $z_f = \frac{(X_f - X_{1-p})}{2MeAD}$  로 측정하였다. 이 때 앞과 동일한 논리로 실제 자료에서 구한 *fractile*  $f$ 와  $z_f$ 의 값으로  $\alpha_f = G(f, z_f; \beta) = F^{-1}(f, z_f; \beta)$ 의 함수 관계성으로부터 추정할 수 있게 된다. 여기서  $\beta$ 의 값은  $\alpha$ 의 값의 추정에 앞서 실제 자료로부터 식 (2.6)을 이용하여 추정 가능하므로, 결국  $\alpha$ 의 값의 추정은  $\alpha_f = G(f, z_f; \beta = \hat{\beta}) = F^{-1}(f, z_f; \beta = \hat{\beta})$  ( $\hat{\beta}$ 은 상수)로 된다. 구체적인 추정치는 대칭적인 경우와 동일하게 보간법(interpolation method)에 근거하여 선형 근사화시켜서 구한다.

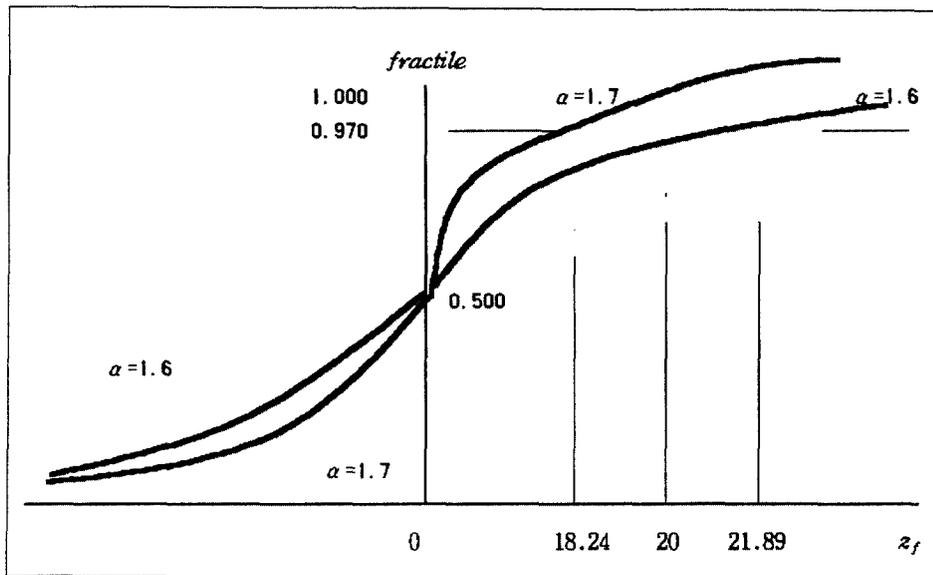
이 원리에 의하여 작성된 <표 3-2-1>부터 <표 3-2-5>까지의 표는 실제 적용시 다음과 같은 순서를 따르면 된다. 첫째 단계는 식 (2.6)에 의하여  $\beta$ 의 추정치를 구한다. 이때  $\hat{\beta} = 0.25$ 로 산출되었다고 하자. 이 경우는 <표 3-2-2>를 참조하면 된다.

둘째 단계는 특성 지수  $\alpha$ 의 값을 추정하는데 <표 3-2-2>에서 Fama, Roll(1968)처럼 *fractile*이 0.970에서 판단하기로 하는 경우 <그림 3-1>에서와 같이 추정된  $z_f$ 의 수치가 20으로 산출되었다고 하자. 이  $z_f$ 의 수치는  $\alpha = 1.6$ 과 1.7 사이에 존재한다.  $\alpha = 1.7$ 일 때  $z_f = 18.2404$ 이며,  $\alpha = 1.6$ 일 때  $z_f = 21.8898$ 이므로  $z_f = 20$ 인 경우의 특성지수  $\alpha$ 의 수치를 선형 근사화시켜 추정할 수 있게 된다. 결과적으로 이러한 방식으로 특성지수  $\alpha$ 의 값과 비대칭도 지수  $\beta$ 를 추정하여 실제 분포를 설명할 수 있게 된다.

### 3.4 본 논문의 관련 연구상의 위치 논의

#### 3.4.1 수익률 분포 연구의 관점에서의 본 연구의 위치

자산 수익률 과정에 관한 지금까지의 관련 연구



<그림 3-1>  $z_f$ 의 추정과 누적 확률 분포 함수

〈표 3-2-1〉 표준화된 파레토-레비 분포의 누적 확률 분포 표 ( $\beta=0.0$ )

이 난수발생을 통한 모의실험은  $\alpha$ ,  $\beta$ 의 수치를 변화시켜 가면서 1회에 571개의 자료를 3000회\* 반복하여 통계량의 효율성을 비교하였다.

$\alpha$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
fractile										
.900	59.8363	53.6338	51.3895	49.4275	47.0438	45.0281	43.6107	41.8871	40.6824	39.5799
.920	72.7203	66.6542	62.0717	58.5024	55.4597	52.8014	50.5782	48.7422	47.2628	46.0159
.940	104.0982	92.1617	83.8068	77.5535	72.3382	67.8665	64.4483	61.2182	58.9028	56.7822
.950	126.0082	108.9989	98.5556	89.1352	82.5448	77.1794	72.7498	69.0399	65.6252	63.0673
.960	152.0082	135.8280	121.8105	110.5251	101.0077	93.3464	87.2576	82.5958	78.3061	74.6638
.970	205.4478	179.3548	159.6693	142.7558	129.9877	118.8199	110.4851	102.9648	96.8722	91.3312
.980	474.9720	399.6355	342.0352	299.6482	266.2205	238.7015	215.8333	197.4756	182.7271	169.4525
.990	616.7719	516.9878	442.7987	382.3854	339.7132	307.1028	278.2678	252.8669	231.7814	213.1515

\* 이 모의실험의 비교가능성과 신뢰성을 높이기 위하여 Fama, Roll(1968)의 모의실험 전체 회수와 유사하게 1회 발생회수와 반복 실험 회수를 조정하였다.

〈표 3-2-2〉 표준화된 파레토-레비 분포의 누적 확률 분포 표 ( $\beta = 0.25$ )

이 난수발생을 통한 모의실험은  $\alpha$ ,  $\beta$ 의 수치를 변화시켜 가면서 1회에 571개의 자료를 3000회 반복하여 통계량의 효율성을 비교하였다.

$\alpha$ fractile	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
.900	57.2948	36.7336	23.5345	16.6881	12.7690	10.3265	8.6721	7.5009	6.6436	6.0048
.920	71.0449	44.8858	28.4117	19.8748	15.0983	12.0936	10.0926	8.6895	7.6580	6.8913
.940	99.9154	62.0104	38.8265	26.8493	20.0113	15.7994	13.0153	11.0719	9.6886	8.6637
.950	110.7343	72.0641	45.0438	30.8645	22.9392	17.9640	14.7180	14.4597	10.8423	9.6427
.960	146.2763	89.2527	54.6992	37.2659	27.4796	21.4401	17.4742	14.7006	12.7014	11.2287
.970	182.8300	118.5270	72.0333	48.3024	35.1725	27.1115	21.8898**	18.2404**	15.6442	13.7262
.980	303.2745	181.8168	111.0054	73.8089	53.0758	40.4643	32.2935	26.6135	22.5527	19.5657
.990	568.0482	333.3133	190.9191	121.5873	84.4715	62.4795	48.4623	38.9808	32.2921	27.3805

\*\* : 본문에서의 설명목적으로 다르게 표시했음.

〈표 3-2-3〉 표준화된 파레토-레비 분포의 누적 확률 분포 표 ( $\beta=0.50$ )

이 난수발생을 통한 모의실험은  $\alpha$ ,  $\beta$ 의 수치를 변화시켜 가면서 1회에 571개의 자료를 3000회 반복하여 통계량의 효율성을 비교하였다.

$\alpha$ fractile	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
.900	51.3100	21.2011	12.0400	8.2243	6.2094	4.9809	4.1686	3.6008	3.1891	2.8828
.920	65.1397	26.2509	14.7017	9.9269	7.4127	5.9033	4.9049	4.2133	3.7116	3.3390
.940	85.8444	35.2204	19.3711	12.8941	9.5114	7.4856	6.1637	5.2502	4.5887	4.0985
.950	105.1010	40.8617	22.4153	14.8227	10.8792	6.9693	6.9692	5.9032	5.1357	4.5688
.960	127.1774	50.4712	27.5525	18.0677	13.1417	10.2060	8.2954	6.9845	6.0459	5.3514
.970	174.1177	66.5387	35.7326	23.2345	16.7572	12.9252	10.4385	8.7216	7.4857	6.5747
.980	275.0297	105.5000	54.8416	34.9221	24.7946	18.8229	14.9845	12.3579	10.4840	9.1092
.990	381.9713	134.7451	67.9135	41.9061	28.9699	21.4699	16.7242	13.5155	11.2571	9.6138

(표 3-2-4) 표준화된 파레토-레비 분포의 누적 확률 분포 표 ( $\beta = 0.75$ )

이 난수발생을 통한 모의실험은  $\alpha$ ,  $\beta$ 의 수치를 변화시켜 가면서 1회에 571개의 자료를 3000회 반복하여 통계량의 효율성을 비교하였다.

$\alpha$ fractile	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
.900	51.4879	14.6982	7.9379	5.3282	3.9920	3.1939	2.6698	2.3049	2.0402	1.8429
.920	60.0547	17.6766	9.5190	6.3614	4.7409	3.7716	3.1330	2.6904	2.3700	2.1319
.940	82.4713	23.1014	12.2843	8.1078	5.9794	4.7130	3.8895	3.3193	2.9059	2.5988
.950	96.7315	26.5106	13.9629	9.1576	6.7188	5.2728	4.3324	3.6797	3.2077	2.8573
.960	113.9618	32.5431	16.9939	11.1142	8.1117	6.3297	5.1702	4.3657	3.7873	3.3568
.970	149.6600	42.3425	21.9565	14.1772	10.2498	7.9248	6.4228	5.3873	4.6428	4.0892
.980	242.2556	63.9013	32.2711	20.4956	14.6394	11.1731	8.9499	7.4243	6.3263	5.5153
.990	428.9371	113.7802	56.6887	35.3999	24.7683	18.6534	14.7385	12.0723	10.1692	8.7633

(표 3-2-5) 표준화된 피레토-래비 분포의 누적 확률 분포 표 ( $\beta = 1.00$ )

이 난수발생을 통한 모의실험은  $\alpha$ ,  $\beta$ 의 수치를 변화시켜 가면서 1회에 571개의 자료를 3000회 반복하여 통계량의 효율성을 비교하였다.

$\alpha$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
fractile										
.900	48.8270	11.3161	5.9842	4.0062	2.9903	2.3827	8.6721	7.5009	6.6436	6.0048
.920	58.4640	13.6422	7.1575	4.7492	3.5212	2.7925	10.0926	8.6895	7.6580	6.8913
.940	77.4860	17.5967	9.1236	5.9974	4.4138	3.4735	13.0153	11.0719	9.6886	8.6637
.950	90.1450	20.1578	10.3815	6.7922	4.9769	3.9036	14.7180	14.4597	10.8423	9.6472
.960	111.3350	24.6249	12.6052	8.1932	5.9654	4.6467	17.4742	14.7006	12.7014	11.2287
.970	146.3910	32.2014	16.2748	10.4324	7.5099	5.7986	21.8898	18.2404	15.6442	13.7262
.980	219.3690	46.8397	23.2430	14.7031	10.4752	8.0136	32.2935	26.6135	22.5527	19.5657
.990	404.8040	81.6625	39.4867	24.4867	17.1193	12.8942	48.4623	38.9808	32.2921	27.3805

를 크게 두 가지 방향으로 분류할 수 있다. 하나는 비조건적인(unconditional) 수익률 분포에 관한 연구 방향이며, 다른 하나는 자산 수익률의 시간에 따른 동적인 구조를 고려하는 방향의 연구이다.

첫 번째 방향의 연구인 비 조건적(非條件的)인 수익률 분포에 관한 연구는 Bachelier가 처음 정규분포를 제시한 이후로, Madelbrot, Fama (1965)등이 제시한 안정 파레토 분포등이 이 부류에 속한다. 이 후에 추가적으로 제시된 분포로는 Mittnik, Rachev(1993)의 대체적인 파레토 분포, Hyperbolic 분포(Eberlin, Keller,1994)와 t-분포를 거론할 수 있다. 주로 이 분야의 연구는 어느 분포가 실제 자료에 더 적합한가를 탐색하는 연구인데, 자산 수익률의 시간적 의존성(temporal dependency)를 고려하지 않은 특징이 있다. 이들 모형들은 시간에 따른 모수의 변화가 없다는 전제 하에서 i.i.d.인 수익률을 가정하였다.

두 번째 방향의 연구는 수익률 과정의 동적인 측면을 고려한 방향의 모형들이다. 이 분야의 연구는 Random walk 가설의 연구방향과 함께 발전하였는데, Brownian motion, Merton(1989)등의 jump process등을 언급할 수 있다. 이들 연구들은 주로 일차 적률의 시간적 변동을 고려했다는 점에 특징이 있다. 이 분야의 추가적인 연구 방향으로 수익률의 분산(또는 변동성)의 변화를 고려한 연구들이 존재한다. 이들은 Engle(1982)의 ARCH, Bollerslev (1986)의 GARCH를 포함한다. 이들 모형들은 분포의 두꺼운 꼬리와 serial clustering 현상을 설명할 수 있는 특징이 있다.

본 연구는 이 중 비조건적인 수익률분포에 해당한다고 볼 수 있다.

### 3.4.2 자산 가격결정이론의 관점에서의 본 연구의 위치

정규분포가 아닌 비정규 파레토-레비 분포의 틀하에서 이 논의를 포트폴리오 이론, CAPM, OPM등의 측면에서 생각해 볼 수 있다.

첫째 포트폴리오 이론에서 위험의 측정치의 변화를 생각해 볼 수 있다. 위험의 측정치가 정규성하에서는 분산을 주로 사용하여 왔는데, 비정규적인 파레토-레비 분포하에서는 이차 적률이 제대로 정의되지 않는 관계로, 척도 모수인  $\sigma$ 나 p-th moment를 대체적인 지표로 고려하자고 제안되고 있다. (Rachev, Mittnik, 2000) 또한 Samorodnitsky, Taqqu(1994)는 정규성 하에서는 covariance가 정의되나 파레토 분포하에서는 이 개념이 covariation이란 지표로 수정되어야 하며, 특성치  $\alpha$ 가 (1,2]일 경우는 covariance를 부분적으로 확장가능하다고 주장하였다. 둘째, CAPM의 틀하에서는 Fama(1970)가 파레토-레비 분포의 척도 모수  $\sigma$ 를 도입하여 베타 계수의 정의를 변화시켜 수정된 CAPM을 제시하였다. 셋째, OPM의 관점에서 적용가능성을 Hurst, Platen, Rachev (1995, 1999)의 연구에서 설명할 수 있다. 이들은 유럽형 콜 옵션의 가격을  $f=(\alpha, \sigma, K, T, r)$ 의 함수로 표시하여 안정성 지수  $\alpha$ 가 증가할 때 유럽형 콜 옵션의 가격이 상승한다고 주장하였다. 넷째로 자산 가격결정과 관련된 재무계량경제학적인 측면에서 생각할 수 있다. 이는 두꺼운 꼬리와 비대칭성은 정규성하의 선형모형으로 쉽게 그 특성을 설명할 수 없다.(Neftci, 1984) 이 문제들을 해결하기 위하여 추정량이나 가설검정시의 통계량등을 수정해야 하며, 이 예들을 Rachev, Mittnik(2000)등이 지적, 제시하고 있다.

## IV. 결 론

본 연구는 주식 수익률 분포의 설명시 정규분포의 대안으로 인정 받아온 파레토-레비 분포의 특성에 관하여 논의하였다. 이 논의시에 실제 분포가 비대칭적인 점을 고려하여 비대칭적인 파레토-레비 분포의 경우를 다루었는데, 구체적으로 다음의 세 가지 주제를 논의하였다.

첫째는 파레토-레비 분포에서 비대칭도를 도입했을 경우 위치 모수로서 어느 지표를 사용하는 것이 표본통계량의 효율성 면에서 우월한지 탐색하였다. 위치 모수의 지표로서 평균, 중앙값, .75 절단된 평균, .90 절단된 평균을 위치 모수의 대응지표로 사용하여 표본의 효율성을 표준편차와 .90 절단된 범위로 측정하였다. 모의실험을 통하여 파레토-레비 분포의 모집단에서 충분한 수의 난수발생을 통해 검증한 결과 중앙값이 대칭, 비대칭여부를 불문하고 거의 모든 경우에 있어서 효율성이 더 높은 것으로 밝혀졌다. 둘째는 적절한 분산도 지표에 관한 논의이다. 이는 첫 번째 모의실험결과에 근거하여 분산도 지표를 중앙값으로부터 떨어진 정도를 측정하는 중앙값 절대편차로 측정하였다. 셋째는 실제 수익률 분포가 양(+ )의 비대칭도를 보이고 있으므로, 모의 실험시 모집단의 분포에서 난수를 발생시킬 때 비대칭도의 수치를 0에서 1까지 변화시켜가면서 파레토-레비 분포의 표준화된 누적확률분포표를 작성하였다.

본 연구는 이전의 파레토-레비 분포에 관한 연구들이 주로 대칭적인 경우만을 다루고 있음을 주목하고 이에 대한 확장을 시도하는 동기에서 출발하였다. 특히 Fama, Roll(1968, 1971)의 대칭적인 파레토-레비 분포에 관한 연구가 이 분야의 연

구에 절대적인 영향을 주었음을 주목하고, 분포의 특성시 이들의 연구방식을 기본으로 하여 비대칭인 경우에 새로운 분산도 측정 지표와 표준화된 누적확률 분포표를 작성함으로써 수익률 분포의 분야에 관한 연구 지평을 확장시켰다. 이 결과를 포트폴리오 이론에의 적용을 생각해 볼 때 분포가 비대칭인 경우 수익과 위험의 측정치에 중앙값과 중앙값 절대편차를 적용시키는 일을 고려해 볼 필요성이 있음을 시사해 주고 있다.

본 연구의 한계점과 앞으로의 연구방향을 다음과 같이 생각해 볼 수 있다. 지금까지 재무문에서 이루어진 연구들을 볼 때 높은 첨도를 갖는 비대칭 분포(asymmetric leptokurtic distribution)에 대한 설명은 시간 가변적인 기대 수익률과 시간 가변적인 분산(GARCH, regime switching model, stochastic volatility model)등을 이용해서도 설명이 가능하다. 또한 시간 가변적인 투자 기회집합(time-varying investment opportunity set)을 이용한 설명이 현실적으로도 단순히 Pareto-Levy 분포에 의한 비조건적인(unconditional) 분포만을 살펴보는 것보다 더 많은 시사점을 줄 수 있다. 또한 Matacz(2000)의 지적처럼 절단된 파레토-레비 분포를 이용하면 유한한 적률과 높은 첨도를 설명할 수 있으며, 동시에 장기간에는 이 분포가 정규분포에 근사하므로 이 분야에 관한 연구도 앞으로의 유망한 연구 분야로 볼 수 있다.

## 참 고 문 헌

- Barnea, A., and Downes, D.H. (1973), "A Reexamination of the Empirical Distribution of Stock Price

- Changes," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 68, pp. 348-350
- Bawa, Vijai, Edwin Elton and Martin Gruber, (1979) "Simple Rules for Optimal Selection in Stable Paretian Markets" *Journal of Finance*, 1041-1047
- Bollerslev, T. (1986), "Generalized autoregressive Conditional Heteroskedasticity" *Journal of Econometrics* 31, 307-327
- Eberlin, E., and Keller, K.,(1995), "Hyperbolic Distributions in Finance" *Bernoulli* 1, pp 281-299
- Engle, R.F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K Inflation" *Econometrica* 50, 9878-1008
- Fama, E.,(1965), "Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market" *Management Science* 11, pp. 404-419
- \_\_\_\_\_(1970), "Risk, Return and Equilibrium" *Journal of Political Economy* 78, 30-55
- Fama, E.F., and R. Roll (1968) "Some Properties of Symmetric Stable Distributions" *Journal of the American Statistical Association*, vol. 63, pp.817-836
- \_\_\_\_\_, (1971), "Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 66, pp.331-338
- Fielitz, B.D.,and J.P. Rozelle, (1983) "Stable Distributions and the Mixture of Distributions Hypotheses of Common Stock Returns," *Journal of the American Statistical Association* vol. 78, pp.28-36
- \_\_\_\_\_, and E.W. Smith, (1972) "Asymmetric Stable Distributions of Stock Price Changes" *Journal of the American Statistical Association* vol. 67, pp. 813-814
- Hurst, S.H.,Platen, E. and Rachev,S.T.(1999) "Option Pricing for a Logstable Asset Price Model" *Mathematical and Computer Modeling* 29, pp. 105-119,
- Hsu Der-Ann, Miller, R.B., and Wichern. D.W., (1974) "On the Stable Paretian Behavior of Stock Market Prices." *Journal of the American Statistical Association*, vol.69, No.345, pp. 108-113
- IMSL User's Manual STAT/library; Fortran Subroutines for Mathematical Applications, (1987), Various Volumes
- Matacz, Andrew, (2000) "Financial Modeling and Options Theory with the Truncated Levy Process" *International Journal of Theoretical and Applied Finance* vol.2 ,No.1, pp.143-160
- Mantega, R. M. and H.E. Stanley, (2000) An Introduction to Econophysics, Cambridge University Press
- Merton. R.C.,(1989), *Continuous Time Finance*, Blackwell, Cambridge, MA
- Mitnik, S and Rachev, (1993), "Modeling Asset Returns with Alternative Stable Distributions" *Econometric Reviews* 12, pp.261-330
- Netfci, S.N.(1996), "Are Economic Time Series Asymmetric over the Business Cycle?" *Journal of Political Economy* 92, 307-328
- Officer, Robert R., (1972) "The Distribution of Stock Returns." *Journal of the American Statistical Association* vol.67, pp 807-812
- Rachev, S., and S. Mitnik, (2000), *Stable Paretian Models in Finance*, Wiley
- Samorodnitsky, G., and Taqqu, M.S., (1994), *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman and Hall, New York, London
- Upton, David and Donald Shannon,(1979) "The Stable Paretian Distribution, Subordinated Stochastic Processes, and Asymptotic Lognormality: An Empirical Investigation" *Journal of Finance* , pp. 1031-1039

# On the Pareto-Levy Distribution

Bahng, SeungWook\*

## Abstract

This paper proposes the asymmetric Pareto-Levy distribution as an alternative distribution model for actual stock returns, and attempts to measure its parameters in a way different from previous studies. In this study, we place special emphasis on the questions of how to select location and scale parameters and to Create probability distribution tables for the standardized asymmetric Pareto-Levy distribution. To explain estimated skewness of the sample stock returns, we depend on Monte Carlo experiments. This paper then suggests median absolute deviation(MeAD) as an alternative measure for the dispersion parameter. Finally, we create standardized probability distribution tables by generating characteristic components and skewness parameters from the original population of the asymmetric Pareto-Levy distribution.

Key words : Pareto-Levy distribution, asymmetric distribution

---

\* Research Fellow, Institute of Management Research, Seoul National University