

혼돈(Chaos)이론에 의한 우리 나라 주가수익률의 분석

허성관

동아대학교 경영학부
(skhuh@daunet.donga.ac.kr)

서용권

동아대학교 기계공학과
(vksuh@daunet.donga.ac.kr)

.....

본 연구는 한국증권시장에서 주식수익률이 카오스적 특성을 지니고 있는지 실증적으로 검정하였다. 선행연구결과가 서로 상반되기 때문에 분석자료를 달리하고 업종별주가지수수익률도 추가로 분석하였다. 분석대상은 1980년부터 1995년까지 16년간 일별주식수익률이다. 가중평균 및 단순평균 종합주가지수수익률과 6개 산업별 지수수익률을 대상으로 Hurst 지수, 및 리아푸노프 지수를 계산하고 기상위상공간에서의 프랙털 구조여부를 조사하였다. 분석결과 서비스 업종인 은행업을 제외하고는 종합주가지수와 산업별 지수의 수익률은 카오스적 특성이 없는 것으로 나타났다. 따라서 우리 나라의 주식수익률은 대부분 무작위적인 것으로 볼 수 있다. 실증적 증거가 미국의 경우와는 상반되고 우리 나라의 경우에도 은행업에서는 카오스적 특성이 있어 추가적인 연구가 계속 필요하다.

.....

1. 서 론

권위있는 경제학 학술지인 Journal of Economic Theory는 1986년도 Vol. 40에 경제·경영분야에 카오스 또는 혼돈이론(chaos theory)을 활용한 논문들만을 게재하여 자연과학에서 개발된 이론이 경제·경영분야에도 광범위하게 활용될 수 있음을 강조하였다. 왜냐하면 혼돈이론은 전통적인 연구 방법으로는 불가능했던 경제·경영 변수들의 진정한 무작위(true random) 변동과 비무작위(nonrandom) 변동을 구분하는 데 유용하기 때문이다.

혼돈이론이 활용된 경제·경영 분야의 연구에로서는, 주가변동을 분석한 Hinch & Patterson (1985), Savit(1988), Schwert(1989), Scheinkman & LeBaron(1989), Hsieh(1991), 외환시

장의 환율변동을 분석한 Hsieh(1987), 주택가격의 변동을 검정한 Craig, Kohlhase & Papell(1991), 경기변동을 분석한 Grandmont & Malgrange (1991), 기업도산 예측을 연구한 Priesmeyer & Baik(1989), 그리고 연구개발비 지출과 생산성을 분석한 Baumal & Wolff(1983) 등을 들 수 있다.

전통적으로 주가가격은 외부 충격(external shock)에 의해서 무작위로 변동하는 것으로 인식되어 왔다. 그러나 무작위한 것처럼 보이는 변수의 복잡한 변동이 사실은 내부적인 비선형 동역학(internal non-linear dynamics)에 의해서 발생한다면 동역학계 자체에 내재되어 있는 변동의 원인을 규명함으로써 변동을 더욱 명확하게 이해할 수 있을 것이다. 변동을 유발하는 내재 요인의 정체를 찾아내는 데 있어서 혼돈이론은 그 가능성을 최초로 제시한 유용한 방법이다.

우리 나라 주식수익률이 카오스적인 특징을 지니고 있는지에 대한 실증적 연구는 김영규·배재봉(1994)과 이일균(1998)이다. 이 두 연구는 모두 우리 나라 종합주가지수의 수익률을 분석하였다. 김영규·배재봉(1994)에서는 종합주가지수 수익률이 내재차원(embedding dimension)이 14이고 상관차원(correlation dimension)이 5에서 6사이인 카오스적 특성을 지니고 있는 것으로 나타났다. 반면에, 이일균(1998)에서는 주식수익률이 카오스적 특성은 없으나 비선형성은 존재하고 있으며, 주가는 백색잡음과정(white noise process)을 따르는 것으로 나타났다. 따라서 우리 나라 주식수익률의 카오스적 특성여부는 반드시 실증적으로 재검정하는 추가연구가 필요하다.

본 연구가 우리 나라 주식수익률에 카오스적 특성이 있는지를 검정함으로써 다음과 같은 몇가지 점에서 공헌이 기대된다. 첫째, 주식수익률에 대한 혼돈이론의 적용은 전통적인 자본자산 가격모형과는 달리 결정론적 계(deterministic system)에서 불규칙적인 변동을 발견하고자 하는 것이다. 따라서 본 연구결과 주식수익률을 혼돈이론이 설명할 수 있다면, 우리 나라 재무관리와 회계학 분야에서 주식수익률을 대상으로 이룩한 연구결과에 추가적인 증거를 제시하게 될 것이며, 심도 있는 후속 연구의 계기가 될 것이다. 이러한 관점에서 본 연구는 부분적으로 탐색적인 연구(exploratory study)의 성격을 띄고 있다고 볼 수 있다.

둘째, 지금까지 재무관리와 회계학 분야 연구에서 주식수익률을 분석한 정보효과 연구에서 발견된 이상현상(anomaly)에 대한 설명이 부분적으로 가능해질 수도 있다. 지금까지는 규모효과(size effect), 1월효과(January effect), 주말효과(weekly effect) 등의 이상현상에 대한 이론적인 설명이 어려웠다. 만약

혼돈이론에 의한 분석 결과 내부적 요소들의 존재가 확인된다면 이 요소들이 바로 이상현상의 설명 변수가 될 수도 있을 것이다. 예를 들면 기업규모에 따라 주가반응이 달라지는 규모효과는 기업규모가 주식수익률의 변동에 영향을 미치는 결정론적 요소일 수 있기 때문이다.

셋째, 회계학 분야에서 순이익과 주식수익률 관계를 분석한 연구들에서 두 변수간의 관계가 시간의 경과에도 불구하고 안정적이라는 가정은 실증적으로 성립하지 않는다. 이 경우 시계열에 내재되어 있는 동역학적인 요소가 알려져 있지 않으면 민감도 분석(sensitivity analysis)을 실시할 필요가 있다. 따라서 주식수익률이 혼돈에 의해서 설명될 수 있다면 순이익과 주가의 관계를 검정함에 있어 비선형 모형을 이용함으로써 검정의 정당성을 확보할 수 있을 것이다. 그러나 회계정보는 통상 시계열이 짧기 때문에 Brock, Dechert & Scheikman (1987)이 개발한 BDS 통계치를 사용하여 비선형성을 검정할 수 있을 것이다.

넷째, 혼돈이론에 의한 분석결과는 현재로서는 예측하는 데 있어서 직접 도움을 줄 수는 없으나, 주어진 주식수익률 시계열과 평균(average), 분산(variance) 및 첨도(kurtosis)에 있어서 동일하게 제작된 인위적 시계열을 상호 비교함으로써 예측 가능한 부분이 과연 존재하는지 여부를 알 수 있을 것이다(Grassberger & Procaccia, 1983b). 리야푸노프 지수(Lyapunov exponent)는 초기에 근접했던 두 궤적이 시간의 경과에 따라 지수적으로 멀어지는 정도를 나타내기 때문에 예측의 가능성 한계를 알 수 있게 한다.

본 연구는 서론 외에 4개장으로 구성되어 있다. II장에서는 카오스이론과 관련 실증연구들을 개관한다. III장에서는 실증분석의 설계로서 분석 대상

과 분석방법을 기술한다. IV장에서는 실증분석결과를 제시하고 그 시사점을 도출한다. V장은 결론으로서 연구결과를 요약하고 연구의 한계와 추가적인 연구가 필요한 분야를 제시한다.

II. 이론적 배경과 선행연구의 고찰

2.1 이론적 배경

경제·경영 분야에 적용할 수 있는 비선형 동역학의 방법이 무엇인지 구체적으로 살펴 보자. 최근, 시계열 데이터로부터 프랙탈 차원(fractal dimension)과 리야푸노프 지수를 구함으로써 시계열 데이터로부터 새로운 의미를 갖는 정보를 얻을 수 있게 되었다. '프랙탈(fractal)'이라는 용어는 1970년대에 Mandelbrot(1977)가 처음 사용하였다. 프랙탈 구조란, 주어진 형체에 대한 관찰망의 크기를 달리 하여도 그 모양이 유사하게 나타나며 반복되는 현상을 의미한다. 자연에서는, 해안선의 굴곡, 고사리 잎의 구조, 눈송이의 결정구조, 산 능선의 변화 형태 등이 전형적인 프랙탈 구조로 알려져 있다. 시계열 데이터도 산 능선의 변화에서와 같이 관찰망의 크기를 달리 했을 때 유사한 양상이 재현된다면 프랙탈 구조를 가진다고 할 수 있으며, 경제학에서의 각종 지표, 기상학에서의 풍속 및 온도 등의 시계열은 일반적으로 프랙탈 성질을 갖는 것으로 알려져 있다.

한편 비선형 동역학(nonlinear dynamics)의 분야에서는, 2~3차원의 간단한 동적 계의 해를 위상

공간(phase space, 또는 state space)에서 나타낼 때 그 궤적이 기묘한 끌개(strange attractor)를 형성할 수 있다는 사실을 발견하였다. 이 끌개는 몇가지 중요한 특징을 보이는데, 궤적이 초기조건에 매우 민감하게 변하는 초기조건에의 민감성(very sensitive to the initial condition), 끌개의 형태가 초기조건에 무관한 불변성(invariant to the initial condition), 그리고 그 구조의 프랙탈한 성질 등이 그것이다. 이러한 특징들을 또한 '혼돈적(chaotic)'이라고 하는데, 혼돈(chaos)과 프랙탈은 따라서 같은 현상을 다른 관점에서 이해함으로써 만들어진 용어라 할 수 있다. 비선형 동역학 방정식의 질적 성질을 이해하려는 연구자들이 그 분석을 통해 혼돈 및 프랙탈의 기본 개념을 정립할 수 있었던 대표적 사상 방정식(mapping equation)은 로지스틱 방정식(logistic equation), Henon 방정식, 그리고 원 사상(circle map) 등이며, 대표적 미분 방정식(differential equation)은 Lorenz 방정식, Duffing 방정식, 그리고 Rossler 방정식 등이다.¹⁾ 특히 Lorenz(1963)가 3개의 변수로 이루어지는 간단한 상미분 방정식의 수치해석을 통해 기상의 장기적 예보가 근원적으로 불가능하다는 것을 암시한 사실은 혼돈역학의 분야에서 상징적으로 취급되고 있다.

본 연구에서 취급하고자 하는 시계열 데이터의 프랙탈 차원에 대해 좀더 명확하게 다음과 같이 정의할 수 있다. 이 앞의 앞 단락에서, 시계열 데이터는 시간영역(time domain)에서 프랙탈한 구조를 일반적으로 가진다고 설명하였으나, 본 연구에서 말하는 프랙탈 차원은 이것을 의미하는 것은 아니다. 이것은 오히려 이 앞 단락에서 설명한 바 있는 기묘한

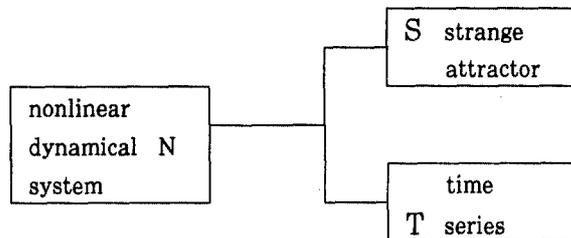
1) 이들 방정식의 내용을 이해하기 위해서 Moon(1987)을 참조할 수 있다.

끌개구조와 직접 관련된다. Lorenz가, 기상이라는 대기현상이 오직 3개의 변수만에 의해 지배된다고 가정하여 세운 방정식이 위상공간에서 기묘한 끌개를 형성함을 보인 바와 같이, 주가수익률의 변동이라는 현상이 예를 들어 5개의 변수가 비선형적으로 결합하여 작용한 결과라 한다면 그 5개의 변수로 이루어지는 비선형 미분 방정식도 기묘한 끌개를 가질 수 있다는 기본 가정을 세울 수 있다. 문제는, 우리에게 주어진 정보는 그 미분 방정식이 아니고 그것이 창출해 냈다고 믿는 시계열 데이터 뿐이다. 그 방정식의 형태는 물론이고 그것이 몇 개의 변수에 의해 지배되는지조차도 우리에게 알려진 것이 아니다. 이런 가운데 시계열 데이터가 우리에게 과연 어떠한 정보를 줄 수 있을 것인가? 이 마지막 의문은 데이터의 통계적 처리를 통해 주어진 시스템의 숨은 정보를 알려고 하는 사람들 또 미래에 대한 예측을 하려는 사람들에게는 항상 제기되는 극히 근원적이며 목적지향적인 의문이다. 이 의문에 답하기 위한 노력의 일환으로 많은 수학자들은 비선형 방정식에 매달렸으며, 알려진 방정식으로 시계열 데이터를 얻어 분석하는 역의 방법을 택한 것이다. 그 결과 시계열 데이터의 분석을 통해 적어도 지배 변수의 수는 알 수 있다는 사실을 발견하였다. <그림 1>은 이 관계를 설명하고 있다. 즉, 수학자들이 기지의 N

(nonlinear dynamical system)으로부터 S(strange attractor)를 구하고 그 성질을 분석한 결과, 통계학자들의 주된 관심인 T(time series)로부터 역으로 N을 구하는 방법이 부분적으로 가능하게 된 것이다.

프랙탈 차원은 결국, 주어진 시계열 데이터가 그것이 무엇인지는 모르지만, 어떠한 결정 방정식(deterministic equation)에 의해 창출된 것인지(즉 카오스적인 것인지, 또는 비무작위한 것인지), 아니면 그야말로 무작위한(random) 것인지를 밝혀 준다고 볼 수 있다; 프랙탈 차원이 유한하면 그 시계열 데이터는 전자에 해당하고 무한대인 경우에는 후자에 해당한다. 주식시장 뿐만 아니라 거의 모든 시스템이, 어떠한 결정론적 법칙(일종의 질서)에 의해 움직인다고 보아야 옳은 것인지, 아니면 물리학에서의 Brown 운동과 같은 랜덤한 움직임으로 보아야 옳은 것인지가 항상 관심의 대상이 되고 있다. 왜냐하면, 분석과 예측의 입장에서 볼 때 전자는 후자보다 훨씬 더 낙관적이기 때문이다. Einstein의 유명한 말, "신은 주사위 놀음을 하지 않는다(God doesn't play dice)"는 자연계의 물리적 현상은 항상 어떠한 결정론적 방정식에 의함을 의미한다. Einstein의 이 말이 과연 경제·경영과 같은 사회과학 분야에 있어서도 적용될 수 있

<그림 1> 수학과 통계학 분야에서 동적 시스템과 관련한 두 가지 관심영역 사이의 관계; 수학에서는 N-S의 관계, 그리고 통계학에서는 N-T의 관계에 주된 관심이 있다.



는지가 본 연구에서 매우 흥미있는 의문인 것이다.

리아푸노프 지수(Lyapunov exponent)는 주어진 동적 계의 해가 초기조건에 얼마나 민감한가를 나타내는 지표이다. 수학자들은 지금까지, 이미 알고 있는 N 으로부터 그 해 S 를 구함으로써 리아푸노프 지수가 양의 값을 가지며 따라서 초기에 극히 가까운 지점에서 출발한 두 궤적은 시간의 경과와 더불어 지수적으로 멀어진다는 사실을 보였다. 즉, 리아푸노프 지수는 초기조건에의 민감성을 나타낸다고 볼 수 있는 것이다. 따라서, 이 값이 크다는 것은 그만큼 미래에 대한 예측이 어렵다고 생각할 수 있다. 수학자들은 또한 $N-S$ 와의 관계를 분석함으로써 미지의 N 이 창출한 T 로부터 리아푸노프 지수를 계산할 수 있게 하는 방법을 찾아 낸 것이다.

본 연구에서는 주어진 주가수익률의 시계열 데이터에 대해 프랙탈 차원과 리아푸노프 지수를 구하는 방법을 적용함으로써 그 적용 가능성은 물론이고 각 시계열 데이터를 창출한 시스템의 특징들을 역으로 찾아내는 것이 과연 가능한지 그리고 그 한계는 어떠한지를 살펴보고자 하는 것이다.

2.2 선행연구의 고찰

최근 재무관리와 회계학 연구에서 주식수익률의 변동이 외부 충격에 의한 것인지 아니면 주식 수익률의 내부적 동역학 때문인지에 관해 논쟁이 있어 왔다.(Ethridge & Sriram, 1993) 외부적 충격에 기인한다면, 경제의 특성이 시간의 경과에 관계 없이 안정되어 있는 경우, 주식수익률 시계열의 변동은 순수한 확률과정(stochastic process)일 것이다. 왜냐하면 외부 충격(정보)이 시간적으로 무작위하게 주식시장에 도달하기 때문이다. 따라서 이 경우, 주식수익률은 확률항(stochastic term)

을 포함시킨 선형 미분방정식(linear differential equation)으로 모형화할 수 있을 것이다.(Merton 1973) 그러나 그것이 내부적 비선형 동역학에 의해 자율적으로 기인한다면 주식수익률의 변동이 불규칙적이기 위해 반드시 외부 충격이 존재할 필요는 없다. 왜냐하면 이 경우 외부의 충격이 없이도 경제의 비선형 동역학과 주식수익률 모형에 내재되어 있는 시차(time lag)로 인해서 지속적인 변동이 일어날 수 있기 때문이다. 따라서 주식수익률 모형을 설정할 때 동역학과 수익률의 질적인 행태에 대한 그 영향을 이해하는 것이 매우 중요할 것이다. 결과적으로 주식수익률이 외부적(무작위) 또는 내부적(비무작위)요인에 의해서 변동하는지는 실증적인 의문사항(empirical question)이다. 이 두 가지 관점은 모두 부분적으로는 정확한 것으로 보인다.

최근 여러 연구들에 의하면 주식수익률은 비무작위적이다.(예를 들면, Benhabib & Day, 1980; Dana & Malgrange, 1984; Hinch & Patterson, 1985; Stutzer, 1980; Brock, Hsieh & LeBaron, 1991; Freeman & Tse, 1991 등) Brock, Hsieh & LeBaron(1991)에 의하면, 비무작위적인 행태를 유발시키는 요소들로서는, 시스템의 비선형 동역학, 저차원 혼돈(low dimensional chaos), 무작위 과정들, 드물게 나타나는 폭발적인 사건들의 정규적 과정(normal process) 또는 시계열의 비정상성(非定常性: nonstationarity) 등이 있다. 이 중 어떤 요소가 주식수익률의 비무작위성을 지배적으로 유발하는지를 밝히는 것이 물론 중요하지만, 이 모든 요소를 모두 고려하기는 현실적으로 쉽지 않다. 그러나 최소한 시계열의 동역학적인 측면을 이해하고 모형에 대한 그 영향을 통제할 수는 있을 것이다.

재무관리와 회계학에서 광범위하게 활용되고 있는 시장 모형(market model)에서 주식수익률은 시장수익률의 선형 함수이다. 시장 모형의 선형성이 통계적 검정결과 자주 기각되지는 않으나 주식시장의 복잡성을 완벽하게 설명하지는 못한다. 즉, 시장모형(market model)의 결정계수(R^2)는 매우 낮다. 따라서 Baumal & Benhabib(1989)가 지적한 바와 같이 검정모형을 선정하기에 앞서 시계열의 동역학적 측면을 분석할 필요가 있다. 혼돈이론은, 연구자들이 주가수익률의 시계열분석 모형을 선정할 때 있어서, 시간의 경과에 따른 시계열의 내부적 동역학을 사전에 이해하는 데에 유용하다.

혼돈이론에 의한 일부 분석 결과를 따르면, 주식수익률 시계열 변동의 일부는 내부적 동역학에 기인한 비무작위적인 것이나 그것이 무작위적인 변동으로 오해될 수 있음을 알 수 있다. 왜냐하면 무작위 및 비무작위 변동의 자기상관 함수(autocorrelation function) 및 주가의 분포가 같게 나타나기 때문이다. 물론 이 경우 조건부 분포는 다르다. 혼돈이론의 분석 결과, 왜 무작위 변동과 비무작위 변동을 구분하는 것이 중요한지를 알 수 있다. 첫째, 비무작위적인 요소를 무작위적인 것으로 취급하면 독립변수와 종속 변수와의 진정한 관계가 호도될 수 있다. 둘째, 비선형적인 요소가 있다고 의심되면 검정모형의 안정성에 문제가 제기될 수밖에 없다. 즉, 시계열이 균형에서 이탈할 때 모형에 어떤 문제가 제기되는지는 혼돈이론 분석에 의해서 이해될 수 있다. 셋째, 대다수의 시계열 분석에서 시계열을 적절하게 특징지우는 데 선형모형 이상의 분석 수준이 필요한 지를 혼돈이론 분석에 의해서 알 수 있다. 마지막으로, 혼돈이론 분석 결과 주가수익을 검정모형의 잔차(residual)가 IID(동일하고 독립적인 분포: identically and independently

distributed)가 아닐 수 있음을 알 수 있다.

특히 잔차의 IID 여부는 가설검정과 예측면에서 중요하다. 잔차가 IID이면 주식가격의 선형 의존성(linear dependence)이 없음은 확실하나 비선형 의존성까지 없다고 할 수는 없다. IID가 아니면 회귀분석의 잔차가 체계적인 유형을 가지게 되면 이는 예측가능성을 내포하고 있다. 따라서 누락된 정보가 잔차와 체계적인 관련성이 있는지 검정하는 것이 중요하다. 누락된 정보는 확실하게 누락된 변수일 수도 있고 모형에 포함되어 있는 변수들의 비선형 결합일 수도 있다. 누락된 변수를 찾아내는 것은 사실상 거의 불가능하다. 왜냐하면 누락된 사실을 알고 있으면 모형에 이미 그 변수를 포함시켰을 것이기 때문이다. 그러나 비선형 결합의 일부는 대체적인 회귀모형을 검정함으로써 최소한 제거할 수 있다. Hsieh(1991)에 의하면, 잔차가 IID가 아닌 이유로서는, 선형결합, 불안정성, 혼돈 또는 기타 비선형 무작위 과정(nonlinear stochastic process) 등이다. 주가수익률은 원시자료(주가)에서 계산된 것이기 때문에 선형결합의 경우는 별로 없을 것이다. 따라서 최소한 혼돈의 경우라도 식별해 낼 수 있으면 검정의 효율성을 높일 수 있다.

잔차가 IID가 아니라는 사실은 미래의 주가수익률을 예측할 수 있는 잠재적인 가능성이 있음을 시사한다. 그러나 주가를 예측해서 직접 돈을 벌 수 있음을 의미하지는 않는다. 따라서 주식시장의 효율성 가설(efficient market hypothesis)에 위배되는 것은 아니다. 즉 평균 수익률 자체를 예측하는 것은 어려우나 분산 또는 비대칭도(skewness)의 예측은 가능할 것이다. 이러한 예측은 실무에서 위험 관리에 추가적인 정보를 제공하게 된다 (Brock, Hsieh & LeBaron, 1991).

시계열 데이터로부터 프랙탈 차원과 리아푸노프

지수를 계산함으로써 저차원 동역학 계의 가능성과 계의 예측가능성의 한계를 추구하려는 노력은 주로 유체역학 중에서도 난류를 다루는 학자들에 의해 시작되었다고 볼 수 있다. Takens(1981)의 가능성 제시에 이어 Grasserberger & Proccacia(1983a)의 실제적 방법 제시가 있는 뒤 이 방법은 매우 넓은 학문 영역에서 다양하게 사용되어 왔다. 최근의 유체역학 분야에서의 연구예만을 간단히 살펴 본다면, Brown & Smith(1991)는 해양 부유물의 이동 좌표를 측정된 데이터를 시계열로 하여 앞에서 설명한 시간지연(time delay)의 방법에 의해 가상 위상 공간을 구성한 뒤 프랙탈 차원을 구한 결과 해양유동은 예상외로 저차원의 동역학에 의해 지배됨을 발견하였다. Gaponov-Grekhov(1994)는 시계열 데이터의 분석에서 상관함수를 상수로 고정하는 것에서 탈피하여 r 의 함수로 가정함으로써 훨씬 더 실제적인 분석이 가능함을 보였으며, 이에 따라 소위 Ω -차원을 제시하였다. Palmar 등(1995)은 해면 위의 풍속을 측정된 시계열 자료를 분석하여 역시 저차원의 동역학이 유동을 지배함을 보였다. Jaeger & Kantz(1997)은 노이즈(noise)가 섞인 시계열 데이터로부터 결정방정식을 유도하는 방법을 제시하였다. Univ. of California, San Diego의 Abarbanel 교수연구그룹(Kennel, Brown & Abarbanel, 1992; Ababanel 1995, 1997)은 최근, 소위 'False Nearest Neighbors'라는 새로운 개념을 도입하여 시계열 데이터의 처리에 관한 보다 효율적인 방법을 제시한 바 있다.

한편, 금융학자와 물리학자로 이루어진 스위스와 독일의 일련의 연구그룹(Ghashghaie, 1996a, 1996b)등은 유체역학 분야에서 아직까지도 풀리지 않은 근본적인 난제의 하나인 난류의 시계열과 금융

시장의 시계열을 동시에 분석한 결과 두 시스템의 동적 특성이 매우 흡사하다고 결론지었다. 예를 들면, 난류에서 에너지 폭포(energy cascade)라는 물리적 개념이 있는데, 이는 어떠한 난류의 에너지는 큰 스케일로부터 작은 스케일로 점차 이전되어 최종적으로 최소의 스케일에서 소산(dissipation)된다는 일반적으로 널리 알려진 상식적인 개념이다. 이와 유사하게, 금융시장(외환시장 또는 주식시장)에서는 중간 딜러들이 큰 규모의 상품(외환 또는 주식)을 접수한 뒤 위험감내한계(risk tolerance)로 인하여 그것을 더 작은 규모로 나누어 다수의 딜러들에게 배분하는 것이 규모의 크기 순으로 일련적으로 이루어 진다. 이들은 이것을 거래폭포(transaction cascade)라 부르고 있다.

우리 나라 주식수익률의 카오스적 특성을 실증검정한 연구 예로서는 김영규·배재봉(1994)과 이일균(1998)을 들 수 있다. 김영규·배재봉(1994)은 종합주가지수의 1980년 1월 5일부터 1992년 6월 30일까지 일별수익률(3655일)과 주별수익률(647)을 자연대수에 의해서 계산하여 분석하였다. 분석방법으로서는 상관차원과 리야푸노프 지수 및 콜모고로프 엔트로피를 활용하였다. 분석결과 종합주가지수 수익률은 내재차원이 14이고 상관차원이 5~6이며 이상한 끝개를 지니는 카오스 특성이 있음을 보였다. 이일균(1998)은 1980년부터 1996년 말까지 종합주가지수의 일별 및 주별수익률을 분석하였다. 분석방법으로는 BDS검정법²⁾, 2분광법, Hinch 검정법, 리야푸노프 지수, 자기닮음 및 쪽거리지수 검정을 활용하였다. 분석결과 종합주가지수 수익률이 카오스 계에 속한다는 가설이 기각되었다. 그러나 주가는 비선형성이 있으며 정규분포 백색잡음과정을 따르고 있는 것으로 나타났다. 이상의 두 연구

2) Brock, Dechert 및 Scheikman(1987)이 개발한 기법임.

논문은 상이한 결과를 보여주고 있다. 두 연구의 차이는 이일균(1998)이 김영규·배재봉(1994)보다 시계열이 길고, 이일균(1998)은 종합주가지수수익률을 어떻게 계산했는지 명확하지 않으나 김영규·배재봉(1994)은 주기의 자연대수로 계산하였다. 이와 같은 상반된 연구결과는 본 연구와 같은 추가적인 연구가 가치가 있음을 시사한다.

III. 실증연구 설계

3.1 분석대상자료의 선정

혼돈이론으로 분석할 자료는 종합주가지수 수익률과 6개 업종(음식료품, 의약품, 철강, 기계, 도매업, 은행)별 주가지수 수익률이다. 종합주가지수는 주식시장 및 업종 전체의 주가 흐름을 나타내기 때문에 분석대상에 포함시킨다. 업종별 주가지수 수익률을 포함시킨 이유는 선행연구보다 좀 더 추가적인 분석을 시도하고자 하는 데 있다. 본 연구에서 분석할 종합주가지수는 가중평균 및 단순평균 종합주가지수이다. 분석대상이 되는 시계열은 8개이다.

분석대상 기간은 1980년 3월 1일부터 1995년 12월 27일까지의 16년간이며, 이 기간동안의 일별 주식수익률을 분석대상으로 한다. 일별 수익률이 분석대상인 이유는 혼돈이론의 적용에 필요한 장기 시계열(적어도 1000개)을 확보하기 위해서이다. 16년간의 일별 수익률 시계열은 관찰수가 4639개가 된다. 분석기간의 선정에 있어서 구조적 변동(structural change; 예를 들면 우리 나라 주식에 대한 외국인 투자의 허용)을 감안하여 결정할

수도 있으나, 혼돈이론 자체가 구조적 변동을 식별해 낼 수 있기 때문에(Ethridge & Sriram, 1993) 그것을 별도로 고려할 필요는 없다.

본 연구에서 분석할 주식수익률 데이터는 한국증권경제연구원에서 편제한 KSRI-Database에 포함된 자료이다. 선행연구들이 활용한 KIS-SMAT 자료의 결과와 비교하는데 의의를 찾을 수 있다.

3.2 분석 방법

3.2.1 Hurst 지수의 계산

Hurst는 평생동안 나일강물의 저장에 관한 연구를 하였다. 그 결과 시계열 데이터의 처리에 있어서 새로운 통계적 방법을 고안하였다. 그것은 소위 R/S 분석법(Rescaled Range Analysis)이고 그 자세한 내용은 Feder(1988)에 잘 설명되어 있다.

어떤 N 개의 시계열 데이터의 집합을 $\{x_t\}$ 라 하자. 그 중에서 첫 r 개의 평균을 $\langle x \rangle_r$ 으로 표기하면,

$$\langle x \rangle_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_i \quad (1)$$

과 같다. 이제 시점 1에서부터 t 까지 사이에 평균 위로 누적된 양 X_t 은

$$X_t = \sum_{i=1}^t (x_i - \langle x \rangle_r) \quad (2)$$

에 의해 구해진다. r 개의 X 중에서 최대, 최소를 각각 X_{\max} , X_{\min} 이라 할 때, 그 차이를 R 로 정의한다:

$$R(r) = X_{\max} - X_{\min} \quad (3)$$

위 식에서 보는 바와 같이, R 은 분명히 r 의 합

수이며 τ 의 증가와 더불어 R 도 증가할 것이 기대된다. 일반성을 기하기 위해 Hurst는 무차원 수 R/S 를 사용하였다. 여기서, S 는 표준편차로서

$$S = \left[\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} (x_i - \langle x \rangle_{\tau})^2 \right]^{1/2}$$

이다. Hurst는 자연현상의 시계열은

$$R/S = (\tau/2)^H \quad (4)$$

의 관계를 가진다는 것을 여러 데이터에 대한 통계처리의 결과로 보여주었다. 여기서 H 를 Hurst 지수라 부른다. 이것은 주어진 시계열 데이터에 대해 시간 축을 2배만큼 늘이고 x_i 값을 2^H 만큼 곱하여 나타내었을 때 그 모양이 원래의 모양과 통계적으로 유사하다는 것과 같은 의미이다(Peitgen et al., 1992). 데이터들의 상관 관계가 없는 Brown 운동의 경우는 $H=0.5$ 가 되고 이 값이 1에 가까울수록 상관관계는 더 커진다. 실제의 계산에서 Hurst의 지수는 $\log \tau$ 을 가로 축으로, $\log(R/S)$ 를 세로 축으로 하는 그래프에서 기울기로부터 결정한다.

3.2.2 시계열 데이터의 가상위상공간 구성

Takens(1981)의 이론에 의하면, 주어진 시계열 데이터로부터 가상위상공간(pseudo-phase-space)을 구성(이것을 embedding이라 한다)하면, 이것은 원래의 위상공간(즉, 원래의 지배변수에 형성되는 위상공간)의 성질을 대변할 수 있다. 구체적인 예를 들기 위해 3개의 변수 x, y, z 에 의해 지배되는 비선형 사상

$$x_{t+1} = f(x_t, y_t, z_t) \quad (5a)$$

$$y_{t+1} = g(x_t, y_t, z_t) \quad (5b)$$

$$z_{t+1} = h(x_t, y_t, z_t) \quad (5c)$$

을 고려하자. 이 시스템의 해는 3차원 위상공간 (x_t, y_t, z_t) 상에서 관찰할 수 있다. 초기 조건 (x_0, y_0, z_0) 에서 출발한 뒤 이후의 모든 해를 이 위상공간 상에서 점으로 나타내면 이 점들의 집합은 곡선(1차원), 곡면(2차원), 또는 3차원 형상을 나타낼 수도 있고, 경우에 따라서는 그 중간적 형상(즉, 프랙탈 형상)을 만들어낼 수도 있다. 만약 이러한 형상들이 초기 조건에 무관하게 항상 일정한 모양으로 나타날 때 이것을 끌개(attractor)라 부른다. 곡선, 곡면, 및 3차원 형상의 끌개는 유클리드적 형상으로서 이상할 것이 없다. 그런데, 그 중간적인 형상의 끌개는 기묘하기 때문에 기묘한 끌개(strange attractor)라 부르고 있다. 이 기묘한 끌개는 비선형 시스템에서 예외적으로 나타나기보다는 오히려 흔히 나타나는 것으로 보아야 한다. 주어진 시스템의 해의 집합이 3차원이면 이것은 원래의 시스템이 비소산적(nondissipative)인 것을 의미하고 3차원으로부터 멀어질수록 더욱 소산적(dissipative)임을 의미한다. 이 점들의 집합에 의해 끌개의 프랙탈 차원을 구하는 방법에 대해서는 추후 소개할 것이다.

그러나, 대부분의 시계열 데이터는 주가지수(또는 주가지수 수익률)의 데이터와 같이 오직 하나의 변수 즉 x_t 의 시계열만을 포함하고 있고 이 변수에 영향을 미치는 다른 변수들이 무엇인지 또는 심지어 몇 개 있는지도 알 수 없다. 그러나, Takens(1981)는 이 시계열만을 갖고도 원래의 미지 시스템의 해의 성질과 변수의 수들을 예측할 수 있다는 이론을 정립하였다. 위에서 제시한 시스템을 예로서 설명한다면, 우선 원래의 위상공간 (x_t, y_t, z_t) 대신에 가상 위상

공간(pseudo-phase-space) (x_t, x_{t+1}, x_{t+2}) 를 구성하고 주어진 시계열 데이터를 이 공간 상에서 나타낸다. 그러면 해의 집합은 원래의 위상공간 상의 해의 집합과 유사한 성질을 보인다는 것이다. 그래서 원래의 위상공간에서 끌개가 존재하며 그것이 2.6의 차원을 갖는다면 이 가상 위상공간에서도 차원 2.6의 끌개가 존재하게 된다. x_t 의 변화에 영향을 주는 변수의 개수를 모르는 상태에서 만약 위상공간을 4차원(이것을 내재차원(embedding dimension)이라 부른다)으로 즉 $(x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, x_{t+3})$ 으로 하여도 그 끌개의 차원은 여전히 2.6으로 남기 때문에, 이 방법은 주어진 시계열의 변수에 영향을 주는 나머지 변수가 몇 개인지 즉 미지의 시스템의 차원이 얼마인지를 추측할 수 있게 한다. 가상 위상공간은 또한 (x_t, x_{t+2}, x_{t+4}) 와 같이 시간적으로 지연된 데이터들을 사용하여 구성할 수도 있다(그림 2 참조).

주어진 시계열 데이터의 개수가 I 이고 그 값을 x_i ($i=1, 2, \dots, I$)로 표시하자. 우리가 생각하는

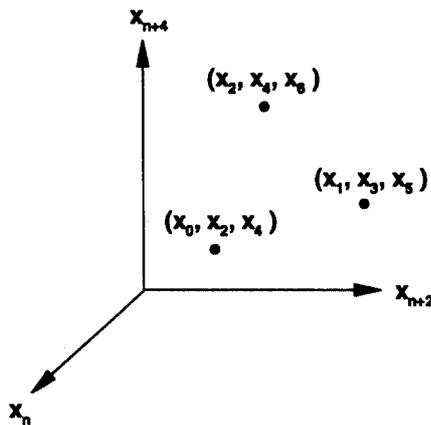
가상 위상공간의 내재차원수를 N 이라 하자. 그러면, 그 공간은 시계열 데이터 중 N 개의 일련의 데이터 세트에 이루어지는 벡터들

$$(x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(N-1)\tau})^T$$

로 구성된다. 여기서, $i=1, 2, \dots, I-N+1$ 이므로, 주어진 I 개의 시계열 데이터로부터 구성할 수 있는 $M=(I-N+1)$ 개의 벡터가 가상 위상공간을 채운다. 여기서 τ 는 지연시간(delay time)으로서 추후 결정할 값이다.

이러한 구성에서는 세 가지 문제점이 대두된다. 첫째는, '지연시간 τ 를 어떻게 하면 가장 잘 선택할 수 있을 것인가?' 라는 문제이며, 둘째는, '미지의 동적 시스템을 잘 대변할 수 있게 하는 최소한의 I 는 얼마인가?' 그리고 셋째는, '임베딩 차원수 N 은 얼마로 하는 것이 적절한가?'의 문제이다. 이 세가지 문제점은 앞으로도 계속 추구해야 할 과제로서 남아 있다고 볼 수 있다. 본 연구에서는 이 세가지 파라미터들을 다양하게 변화시키면서 최적

〈그림 2〉 가상위상공간의 구성; 그림은 내재차원 3에 지연시간을 2로 하였을 때임.



의 정보를 얻는 방법을 터득할 것이다.

3.2.3 프랙탈 차원의 계산

프랙탈 차원(fractal dimension)은 유사한 개념이지만 실제 계산 방식의 차이에 따라 점별(点別)차원 (pointwise dimension), 상관차원(correlation dimension), 및 정보차원(information dimension) 등으로 나누어 진다. 이 중에서 현재 가장 널리 사용되고 있는 것은 상관차원이다. 상관차원은 유체유동과 관련한 실험(Malraison et al(1983), Swinney(1985), Ciliberto and Gollub(1985)), 기계적 진동계(Moon and Li(1985)), 레이저 시스템, 기상학(Essex et al(1987), Tsonis & Elsner(1988), Poveda-Jaramillo & Puente(1993)), 플라즈마 등의 연구에서 널리 사용되고 있다. Grasserberger & Proccacia(1983a)는 이 차원에 대해 다양하게 연구한 바 있다.

가상 위상공간에서의 두 벡터를 u_i, v_j 라 할 때 이 두점 간의 거리 s_{ij} 를

$$s_{ij} = |x_i - x_j| \quad (6)$$

와 같이 계산한다. 여기서, 이 거리는 통상적인 유클리드 거리(Euclidean measure of distance; 즉, 각 성분의 제곱을 더한 뒤 그것을 제곱근으로 한 값)일 수도 있고 단순히 각 성분의 절대값들을 더한 것일 수도 있다; 본 연구에서는 전자의 방법을 사용하였다. 다음, 상관 함수 $C(r)$ 을 아래와 같이 정의한다.

$$C(r) = \frac{1}{M(M-1)} \sum_{i \neq j} \theta(r - s_{ij}) \quad (7)$$

여기서, θ 는 Heaviside 계단 함수³⁾이다. 즉, $C(r)$ 은 시계열 데이터로 이루어지는 가상 위상공간에서 임의의 두 벡터간의 거리가 r 보다 작을 확률에 해당한다. 일반적으로 r 이 작은 경우 $C(r)$ 과 r 은

$$C(r) \sim r^D \quad (8)$$

의 관계를 가지는 것으로 알려져 있다. 여기서 D 가 바로 상관차원에 해당한다. 끝개가 위상공간에서 2차원 형상이라면, 이 프랙탈 차원은 2가 되고, 3차원 형상이라면 3이 된다. 일반적으로 기묘한 끝개는 정수가 아닌 프랙탈 차원을 가진다. D 의 계산식은 따라서 다음과 같다.

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r} \quad (9)$$

실제적으로는 $\ln C(r)$ 을 $\ln r$ 에 대해 그린 그래프에서 그 기울기를 측정하여 결정한다. 프랙탈 차원을 계산할 때 조심해야 할 점은, 식 (5)의 원래의 취지를 살려 가능하면 r 이 작은 범위에서 결정하는 것이 좋지만 r 이 너무 작아져서 r_{ij} 의 최소값에 가까워지면 그래프의 기울기가 갑자기 크게 증가하므로 이 범위는 피해야 한다. 실제적으로 유한한 프랙탈 차원을 가지는 시계열 데이터를 분석해보면 이 기울기가 일정하게 유지되는 최적의 r 범위가 늘 존재한다.

3.2.4 리야푸노프 지수의 계산

리야푸노프 지수는 초기에 극히 가까이 존재하던 두 궤적이 시간의 경과에 따라 지수적으로 멀어지는

3) Heaviside 계단함수 $\theta(r)$ 은 $r \geq 0$ 때 $\theta=1$, $r < 0$ 때 $\theta=0$ 으로 정의되는 함수이다.

정도를 나타내는 값이다. 비선형 동적 계가 먼저 주어지고 이것으로부터 리야푸노프 지수를 계산하는 것은 현재로서는 그다지 큰 문제가 되지 않으나, 그 동적 계를 알 수 없는 상황에서 시계열 데이터만 주어지는 경우에는 이것을 계산하는 일이 그렇게 간단하지는 않다. 시계열 데이터로부터 리야푸노프 지수를 효과적으로 계산하는 방법의 개발을 최근 다양하게 시도하고 있다(Wolf et al (1985), Sano & Sawada(1985), Eckmann et al(1986), Landa & Chetverikov(1988)). 리야푸노프 지수에 의한 분석도 역시 기상학(Poveda-Jaramillo & Puente (1993)) 등에서 다양하게 이용되고 있다. 본 연구에서는 Wolf 등(1985)의 방법을 사용하여 리야푸노프 지수를 계산하였다.

〈그림 3〉을 토대로 본 연구에서 적용한 계산 방법을 설명하면 다음과 같다. 우선, 가상 위상공간 상에서 임의의 두 점 A_0, B_0 를 선택한다. 이 두 점은 가능한 한 가깝되 두 점 간의 시간 차이는 적어도 평균 궤적 주기(mean orbital period)보다 커야 한다. 이 값은 Hurst 지수를 구할 때 R/S 해석으로부터 얻어진다(Peters, 1996). 이 두 점은 그 다음 시점에서 A_1, B_1 으로 각각 이동하고, 계속하여 A_2, B_2, \dots 으로 이동한다. 그러면 두 점 사이의 거리 $\overline{A_0B_0}, \overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \dots$ 는 일반적으로 시간의 경과와 더불어 지수적인 빠르기로 증가하는 것으로 볼 수 있으므로, 상수 λ 에 대해

$$\overline{A_iB_i} = \overline{A_0B_0} \exp[\lambda(t_i - t_0)] \quad (10)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 상수 λ 는 두 점이 시간에 따라 얼마나 빠른 속도로 서로 멀어지는지를 나타낸다고 볼 수 있다. 이 식을 λ 를 구하는 형태로

표현하면

$$\lambda = \frac{1}{(t_i - t_0)} \ln \left[\frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{A_0B_0}} \right], \quad (11)$$

여기서 $i \rightarrow \infty$ 때의 λ 값을 리야푸노프 지수라 부른다. 실제의 계산에서는 약간의 트릭을 필요로 한다. 식 (11)은 아래와 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

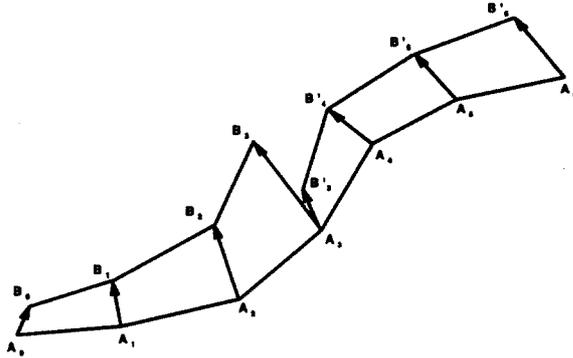
$$\lambda = \frac{1}{(t_i - t_0)} \left[\ln \left(\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_0B_0}} \right) + \ln \left(\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} \right) + \ln \left(\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_2B_2}} \right) + \dots \right] \quad (12)$$

그런데 두 점 사이의 거리가 시간에 따라 지수적으로 증가하는 것은 두 점 사이의 거리가 매우 작을 때에 한한다. 따라서 그 거리가 어느 한계를 넘으면 가까운 두 점을 다시 잡아서 계산을 계속해야 한다. 이 때 보통 한 점(즉 A)은 그대로 두고 다른 점(즉 B)만 다시 잡는다. 〈그림 3〉은 $i=3$ 에서 거리 $\overline{A_3B_3}$ 가 한계를 넘었기 때문에 새로운 점 B_3' 을 잡아서 그 후의 발전 과정을 계속 추적하는 모양을 스케치한 것이다. 이 때 새로운 점 B_3' 은 A_3 에 가까우면서도 $\overline{A_3B_3}$ 가 $\overline{A_3B_3}$ 에 평행하도록 결정할 필요가 있다. 그러면 식 (12)는

$$\lambda = \frac{1}{(t_i - t_0)} \left[\ln \left(\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_0B_0}} \right) + \ln \left(\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} \right) + \ln \left(\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_2B_2}} \right) + \ln \left(\frac{\overline{A_4B_4'}}{\overline{A_3B_3'}} \right) + \dots \right] \quad (13)$$

으로 된다.

〈그림 3〉 리아푸노프 지수의 계산을 위한 개념도



본 연구에서 사용한 코드는 Wolf et al(1985)이 개발한 것을 근간으로 한 것인데, 그들은 자연 대수가 아닌 밑이 2인 대수를 사용하였다. 즉 식 (13)의 \ln 은 \log_2 로 대체되어야 한다. 밑이 2인 대수를 사용함에 따른 이점은, 그렇게 하여 얻은 리아푸노프 지수는 정보의 손실속도를 비트(bit) 단위로 이해할 수 있게 한다는 점이다. 예를 들어 $\lambda = 0.42$ 가 얻어졌다면, 그리고 현재의 정보가 5 비트의 정밀도를 유지한다면 이 정보는 5/0.42 즉 12 시간단위 만에 모든 정밀도가 사라진다는 의미이다; 여기서 '시간단위'는 식 (13)에서 t_i 의 시간 단위와 일치한다. 이것은 5 비트 정도의 정밀도를 가지는 변수의 시간변화를 다루는 시스템에서 12

시간 단위 후의 예측은 전혀 불가능함을 의미한다.

IV. 실증분석 결과⁴⁾

4.1 Hurst 지수

〈그림 4〉는 단순평균 종합주가수익률(즉 EQW RT)에 대해 구한 R/S 를 $\log - \log$ 그래프에서 τ 의 함수로 나타낸 것이다. 그림에서 기울기 0.65가 Hurst 지수에 해당한다. 〈표 1〉은 본 연구에서 계산한 우리나라 주가수익률의 Hurst 지수와 Pandey

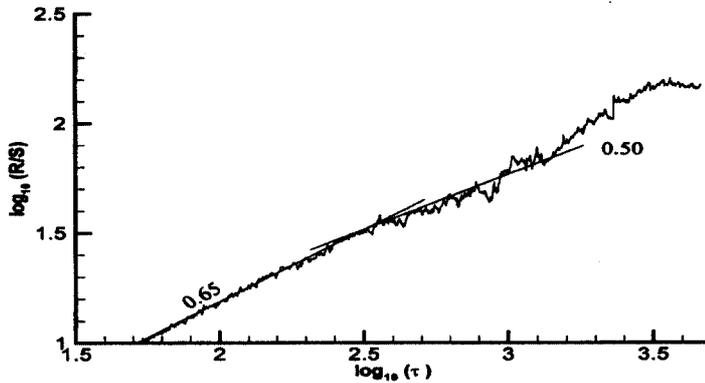
〈표 1〉 국가별 주가수익률의 Hurst 지수와 사이클 기간

	Hurst 지수	사이클 기간 (년)
독일	0.53	3.0
프랑스	0.45	3.4
이태리	0.60	1.7
미국	0.58	3.5
한국	0.65	1.0

* 한국 외의 데이터는 Pandey et al.(1998)로부터

4) 본 연구에서 사용한 계산 프로그램은 대부분 자체 개발한 것이며, 리아푸노프 지수의 계산을 위해서는 Wolf 등(1985)의 프로그램을 참고하였다.

〈그림 4〉 주기수익률의 R/S의 분포



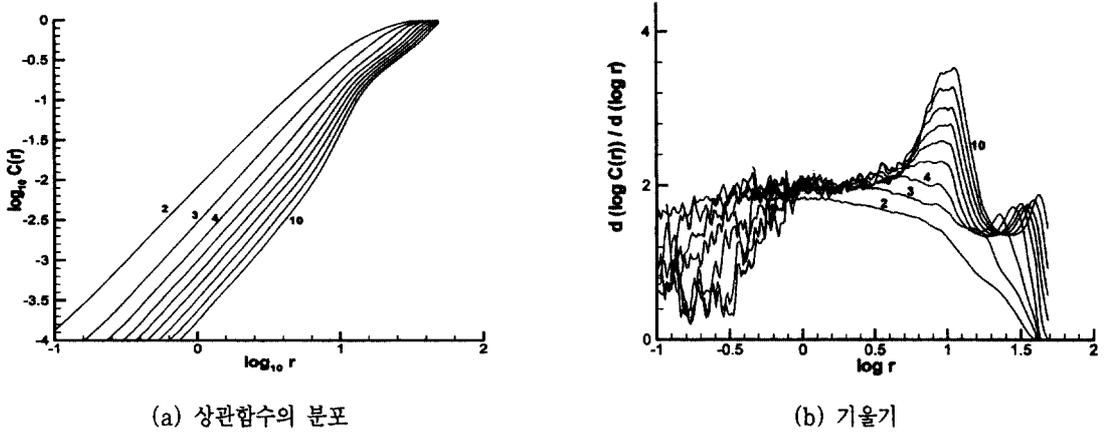
et al.(1998)이 구한 다른 나라의 주기수익률의 Hurst 지수들을 비교하여 나타낸 것이다. 이 표를 보면 우리 나라의 Hurst 지수가 가장 높으며 그 다음이 이태리, 미국, 독일, 그리고 프랑스 순이다. Hurst 지수가 0.5보다 클수록 시계열 데이터가 같은 경향으로 변화할 가능성이 크다는 것을 의미하고 (이것을 지속성(persistence)이 강하다고 말한다), 반대로 0.5보다 작을수록 반대로 변화할 가능성이 크다는 것을 의미한다(이것을 반지속성(antipersistence)이라 말한다)(Peters, 1996). 따라서, 우리 나라의 주식시장에서 주기수익률의 변화는 〈표 1〉의 다른 나라에 비해 지속성이 가장 크다고 말할 수 있다.

즉, 오늘 수익률이 +이면 내일의 수익률도 +일 확율이 높다. 한편, 〈그림 4〉에서 기울기 0.65인 직선과 기울기 0.5인 직선이 만나는 점의 $\log \tau$ 값이 약 2.5인데, 이것은 $10^{2.5}$ 즉 316일 만에 초기 조건의 영향이 모두 상실된다는 것을 의미한다. 다르게 표현하면, 주기수익률의 사이클은 316일이

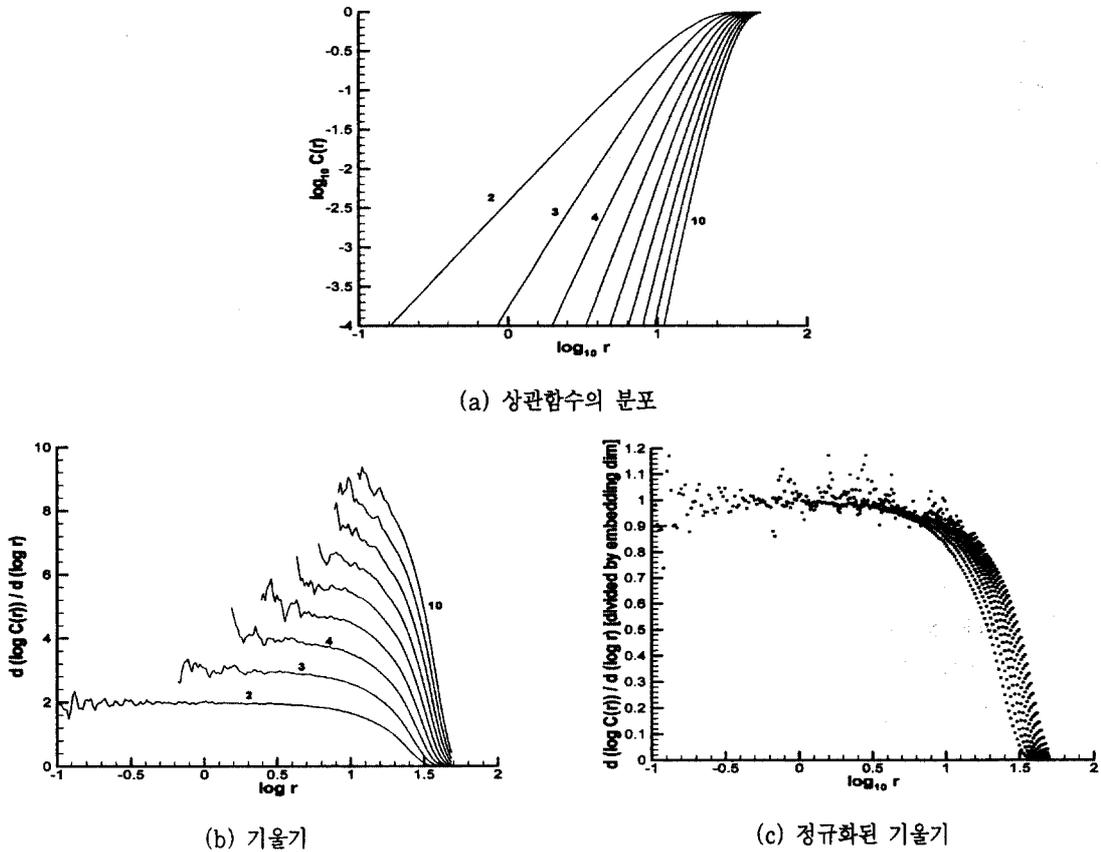
라는 것이다. 이 결과는 유성희와 김상락(1997)의 계산치 332일과 큰 차이가 없는 것으로서, 계산의 신뢰성을 확인해주고 있다. 주기수익률의 데이터가 없는 일요일까지 포함한다면 이것은 369일 즉 거의 1년에 해당한다. 〈표 1〉에서 Pandey et al. (1998)이 구미 선진국의 주기수익률에 대해 계산한 사이클 기간과 비교하면 우리 나라의 사이클 기간이 가장 짧음을 알 수 있다. 그 다음으로, 이태리, 독일, 프랑스, 그리고 미국의 순이다. 사이클 기간은 시계열 데이터의 변화양상이 크게 보았을 때 얼마만한 주기로 변화한다고 통계적으로 말할 수 있는가를 나타내기 때문에, 우리 나라의 주기수익률은 통계적으로 볼 때 정확히 1년 단위로 반복된다고 말할 수 있다. 〈표 1〉에서 나타난 바와 같이 그렇지 않은 구미 선진국과 비교하면 이는 매우 흥미있는 결과이다. 이는 우리 나라의 주식시장에 미치는 연중 이벤트(한 예로서 계절 효과)의 영향이 크다는 것을 의미한다.⁵⁾

5) 1년의 순환주기는 투자자들의 투자의사 결정대상 기간이 대체로 1년 정도임을 시사하는 결과일 수 있을 것이다. 기업의 경영계획 기간이 통상 1년임과 관련될 수도 있을 것이다.

〈그림 5〉 Rossler 방정식의 상관함수 분포와 기울기



〈그림 6〉 Rossler 데이터를 무작위적으로 재배열한 후의 상관함수, 기울기, 및 정규화된 기울기



4.2 시계열 데이터의 위상공간 상에서의 프랙탈 구조

만약 주어진 시계열 데이터가 가상위상공간 상에서 어떠한 저차원 끌개를 가진다면 상관함수 $C(r)$ 을 r 의 함수로 하여 $\log - \log$ 좌표에서 그렸을 때 내재차원의 증가에도 불구하고 그 기울기 $d(\log C(r))/d(\log r)$ 가 변하지 않는 지역이 존재해야 한다. <그림 5>는 3개의 변수를 가지는 시스템인 Rossler 방정식의 수치해석 데이터를 시계열로 만들고 그 결과를 분석한 것이다. 그림을 보면 내재차원의 수가 증가하여도 기울기의 값이 약 2로서 변하지 않는 지역이 존재함을 알 수 있다. 만약 주어진 시계열 데이터가 무작위 과정이라면 그 기울기는 내재차원에 비례하여 증가한다. <그림 6>은 앞의 Rossler 데이터를 시간적으로 무작위하게 재배열한 뒤 분석한 결과이다. 내재차원의 수가 증가하여도 기울기가 일정하게 유지되는 구간이 존재하지 않음을 알 수 있다(<그림 6(b)>). <그림 6(c)>는 그 기울기를 내재차원의 수로 나누어 정규화시킨 결과로서, r 의 감소와 더불어 대체로 1로 접근함을 볼 수 있다. 이것은, 무작위 과정에 의한 시계열 데이터는 충분히 작은 r 의 범위에서 기울기 $d(\log C(r))/d(\log r)$ 는 내재차원의 수에 비례한다는 사실을 입증한다.

이제, 단순평균 종합주가수익률의 16년간 일별 시계열 데이터에 대한 분석결과가 <그림 7>에 나타나 있다. <그림 7(a)>를 보면 내재차원의 수가 증가함에 따라 상관함수의 기울기도 증가함을 알 수 있고, 기울기 $d(\log C(r))/d(\log r)$ 를 r 의 함수로 그린 <그림 7(b)>에서 이것을 확실히 확인할 수 있다. 이 기울기를 내재차원의 수로 정규화(normalize)시킨 <그림 7(c)>에서는 r 의 감소에 따라 이 값이 1로 접근하는 것을 알 수 있다. 이로

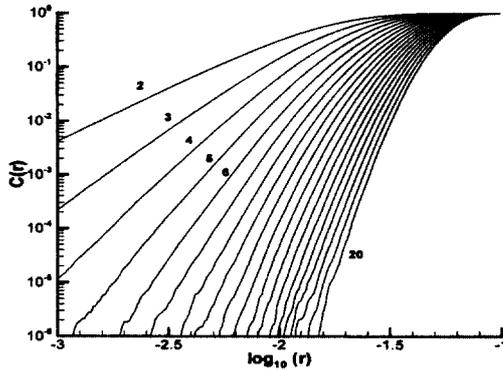
부터, 우리 나라 종합주가수익률은 무작위 과정에 의해 형성된 것임을 알 수 있다. <그림 7>은 지연일수를 $\tau=100$ 일로 한 결과이고, 지연일수를 400일로 하여도 결과는 마찬가지로 확인할 수 있었다. 또한, 종합주가수익률 데이터를 시간적으로 다시 무작위하게 섞어 가상위상공간 상에서 상관함수를 구하여 분석하였으며 예상대로 두 결과는 매우 유사함을 확인할 수 있었다.

데이터가 무작위한 것이라면 가상위상공간 상에서는 그것이 어떠한 구조를 가질 것인지가 궁금한 점이다. <그림 8>은 2차원 및 3차원 위상공간에서 본 구조이다. 데이터의 밀도는 중심으로 갈수록 더욱 높다. 이것은 무작위 과정의 특성을 대변하는 가우스 분포에 흡사하다.

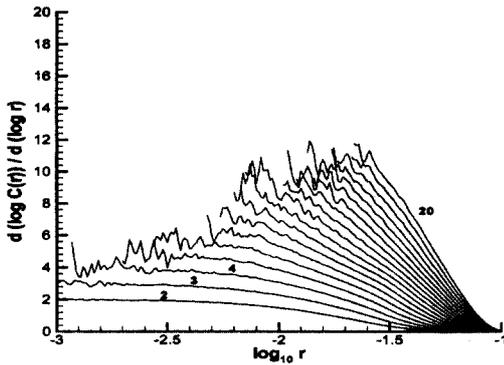
한편 가중평균 종합주가수익률(KOSPR) 데이터에 대해서도 동일한 방법으로 분석하여 보았으며, 결과는 단순평균의 경우와 매우 흡사하였다. 이것은 평균화방법에 따라 구조의 차이가 날 수 없다는 사실을 확인해주는 결과이다.

업종별로도 분석해 보았다. 음식료품, 의약, 철강, 기계, 도매업, 은행업 등 6개 업종에 대한 분석결과 서비스 업종인 도매업과 은행업을 제외한 업종은 모두 종합주가수익률과 유사한 결과를 보였다. <그림 9>는 대표적으로 기계분야에 대한 분석 결과를 보여준 것이다. 종합주가수익률에 대한 결과인 <그림 7>과 비교하면 대동소이함을 알 수 있다. 한편, 도매업에 대한 분석 결과인 <그림 10>을 보면, <그림 7> 또는 <그림 9>와는 약간 다른 양상을 볼 수 있다. 즉, 내재차원의 수가 5~10인 곡선들의 기울기는 r 의 감소와 더불어 증가했다가 다시 감소하는 경향을 보인다(<그림 10(b)>). 이것은 저차원 끌개를 가지는 시스템의 전형적인 특징 즉 <그림 5(b)>와 유사하다. 그러나, 내재차원

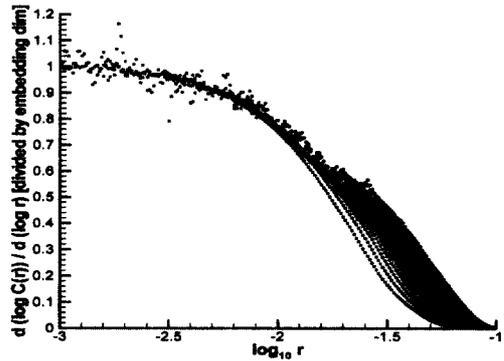
<그림 7> 단순평균 종합주가수익률의 상관함수, 기울기 및 정규화된 기울기



(a) 상관함수의 분포

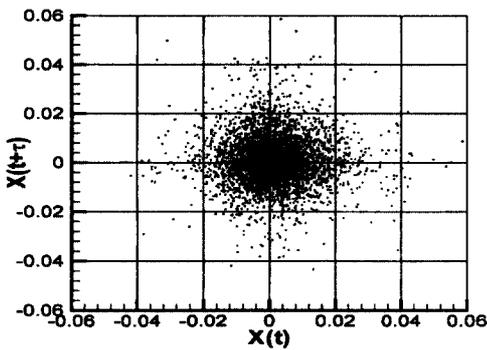


(b) 기울기

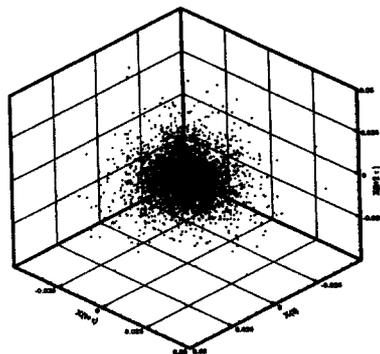


(c) 정규화된 기울기

<그림 8> 2차원 및 3차원 가상위상공간에서의 단순평균 종합주가수익률 데이터의 분포

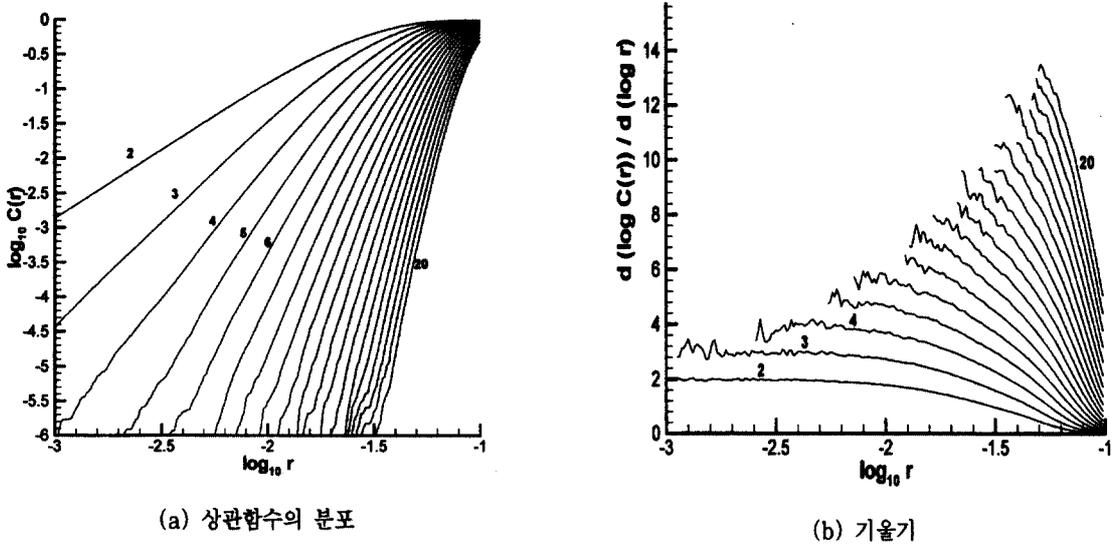


(a) 2차원 위상공간에서의 분포

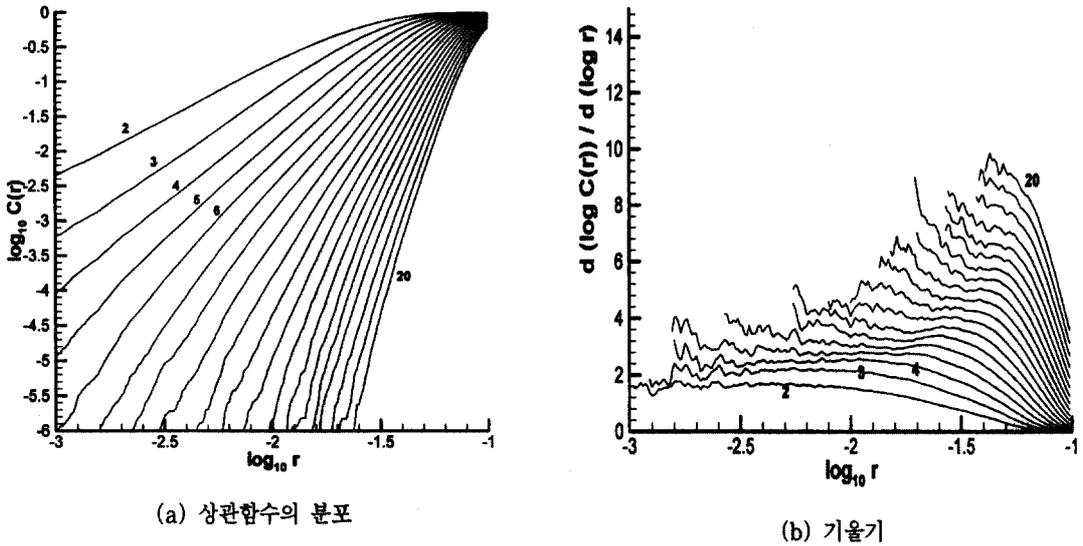


(b) 3차원 위상공간에서의 분포

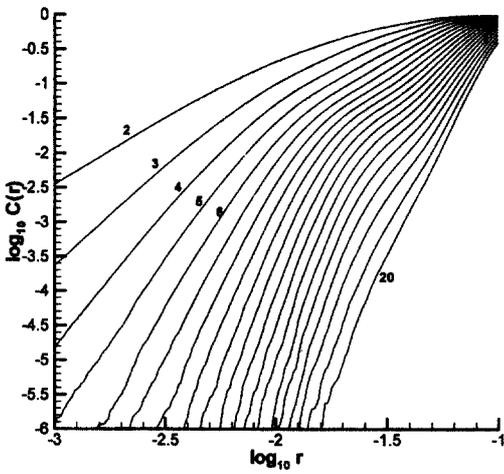
〈그림 9〉 기계업 주기수익률의 상관함수와 기울기



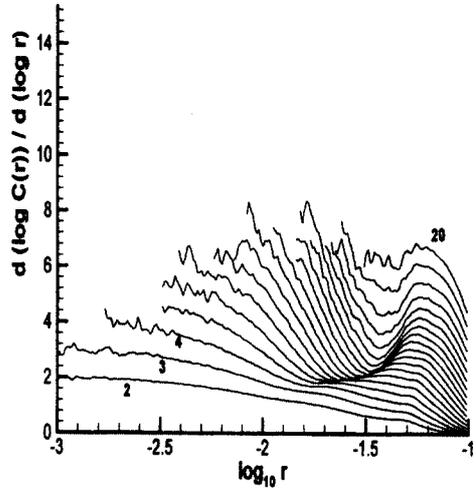
〈그림 10〉 도매업의 상관함수와 기울기



〈그림 11〉 은행업의 상관함수와 기울기

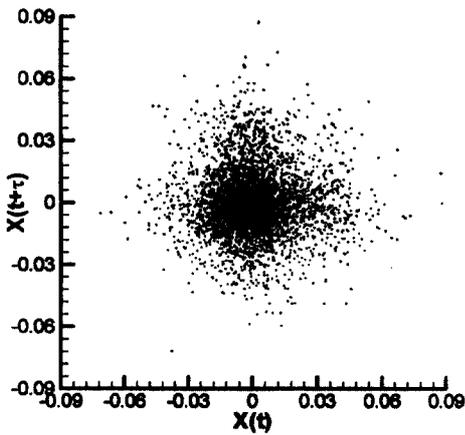


(a) 상관함수의 분포

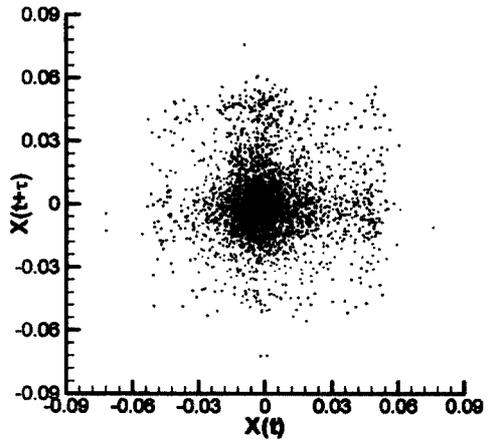


(b) 기울기

〈그림 12〉 기계업과 은행업의 주기수익률 데이터의 2차원 가상위상공간 분포

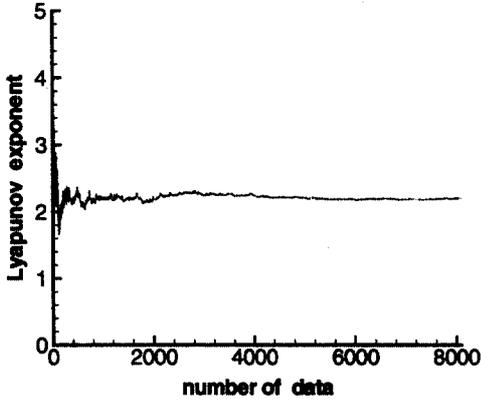


(a) 기계업

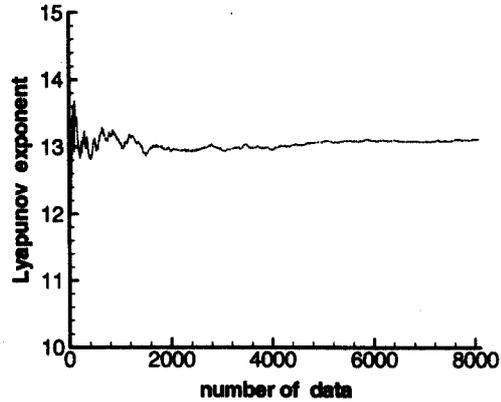


(b) 은행업

〈그림 13〉 Lorenz 데이터에 대한 리야푸노프 지수의 변화



(a) 원래의 데이터에 대한 결과



(b) 무작위하게 재배열한 데이터에 대한 결과

의수와 더불어 이 기울기 값은 서서히 증가하는 양상을 보인다. 한편, 은행업의 경우는 더욱 특이하다(〈그림 11〉). 내재차원 5 이상의 곡선들은 모두 기울기가 감소하는 특징을 보이며 특히 내재차원 5~10에서는 기울기 값이 2 정도로 유지되는 구간이 나타난다. 이것은, 은행업의 주가수익률을 결정짓는 동적 시스템은 2개 내지 3개의 변수로 이루어지는 저차원 시스템에 어느 정도 유사할 것임을 시사하는 것으로서 매우 흥미있는 결과이다.

〈그림 12〉는 무작위 과정에 의한 데이터의 특성을 보이는 기계업과 저차원 시스템의 특성을 풍기는 은행업의 데이터들의 2차원 위상공간 상에서의 밀집구조를 보인 것이다. 기계업의 경우(〈그림 12(a)〉)에는 중심에 밀집해 있고 그 무방향적 특성을 알 수 있다. 이에 비해 은행업의 경우(〈그림 12(b)〉)에는 데이터들이 중심에 밀집해 있기는 하나 양의 $x(t)$ 및 $x(t + \tau)$ 축에도 밀집해 있는 특성을 관찰할 수 있다.

4.3 리야푸노프 지수

종합주가수익률의 단순평균 데이터에 대한 가상 위상공간 상에서 리야푸노프 지수를 계산한 결과가 〈표 2〉에 나타나 있다. 결과를 보면 시간지연 일수나 내재차원의 수에 따른 영향은 크지 않고 계산상의 격자 수에 다소 민감한 영향을 받음을 알 수 있다. 격자가 많을수록 정밀한 데이터가 얻어진다는 사실을 감안하여 리야푸노프 지수는 대략 0.43 정도인 것으로 확인할 수 있다.

양의 리야푸노프 지수는 위상공간 상에서 두 점이 시간과 더불어 지수적으로 멀어지고 따라서 초기조건에 민감함을 의미한다. 즉, 이것은 우리나라 주가수익률의 데이터가 가상위상공간 상에서 어떠한 저차원 끌개를 가질 수 있음을 암시한다. 그러나, 이것은 사실과 다르다는 것을 Lorenz 데이터에 대한 해석 결과로부터 알 수 있었다. 우선, Lorenz 시스템의 8192개 시계열 데이터를 갖고 리야푸노프 지수를 구한 결과 2.20이 얻어졌으며

〈표 2〉 종합주가수익률의 단순평균 데이터에 대한 리야푸노프 지수

시간지연(일)	100	200	400	400	400
내재차원	5	5	5	8	10
격자 수	8	8	8	8	4
리아푸노프 지수	0.43	0.45	0.44	0.42	0.34

이는 엄밀해와 같다. 〈그림 13(a)〉는 그 결과로서 데이터 수의 증가와 더불어 리야푸노프 수가 거의 일정한 값으로 수렴함을 보여주고 있다. 다음, 이 데이터를 무작위한 방법으로 재배열시킨 뒤 리야푸노프 수를 계산한 결과가 〈그림 13(b)〉에 주어져 있으며, 마지막 값은 13.1 정도이다. 이와 같이 분명히 무작위한 특성을 보이는데도 그 리야푸노프 지수는 양의 값을 보임을 알 수 있으며, 이로부터 리야푸노프 지수가 양이라고 하여 반드시 저차원 동적 시스템이 존재한다고 볼 수는 없음을 알 수 있다.

V. 결 론

선행연구와 비교하여 본 연구는 가중평균 종합주가지수 수익률은 물론 단순평균 종합주가 수익률과 6개 산업별 주가지수 수익률을 추가적으로 분석하여 우리 나라 주식수익률이 카오스적 특성을 지니고 있는지를 검정하였다. 검정결과 은행업을 제외하고는 카오스적 특성이 없는 것으로 나타났다. 특히 종합주가지수의 평균을 구하는 방법은 주식수익률의 카오스적 특성과는 무관하였다.

은행업의 주식수익률이 카오스적 특성을 보이는 이유는 분석된 6개 산업 중에서 은행업만 정부의 규제대상 업종인 사실과 관련되어 있는지도 모른

다. 분석대상 기간이 1995년 말까지 16년간이고 이 기간 중 은행업은 금리 결정 등 중요 업무 분야에서 정부의 강력한 규제를 받았다. 정부의 규제가 주식수익률에 미치는 영향을 분리해 내기는 어려우나 간과할 수는 없을 것이다.

우리 나라 주식수익률이 카오스적 특성이 없다는 (즉 결정론적 계에 속하지 않는다는) 분석 결과는 선행 연구에서 수행된 IID를 가정한 검정들에 큰 문제가 없음을 시사하고 있다. 아울러 주식수익률 예측은 여전히 어려운 과제인 것으로 확인된 셈이다.

그러나, 우리 나라 주식수익률에 카오스적 특성이 없다고 단적으로 결론을 내리기는 아직은 빠르다고 할 수 있다. 왜냐하면 이 분야의 국내 연구 논문이 세 편에 불과하고 연구 결과도 일관성 없을 뿐만 아니라 미국 등의 일부 연구와도 상이하기 때문이다. 따라서 추가적인 연구가 필요하다. 개별 주식의 수익률에 대한 분석도 추가적인 증거가 될 수 있을 것이다. 자본시장의 구조와 운용이 현저하게 달라진 IMF 구제금융 이후의 주식수익률을 분석하게 되면 새로운 증거가 제시될 수도 있을 것이다.

참 고 문 헌

- 김영규 · 배재봉(1994), chaos 모형을 이용한 한국주식 시장의 비선형동태적 특성에 관한 연구. **재무관리연구** 제11권 제11호, pp.73-96.
- 유성희 · 김상락(1997), 한국주가지수 수익률의 변동특성에 관한 연구. - R/S 분석을 중심으로 -, **재무관리연구** 제14권 제3호, pp.183-201.
- 이일균(1998), 카오스 현상과 자본시장의 가격형성 메카니즘. **증권학회지**, 제23집, pp.1-59.
- Abarbanel, H. D. I. (1995) *Analysis of observed chaotic data*. Springer-Verlag, New York/Berlin
- Abarbanel, H. D. I (1997) Tools for the analysis of chaotic data. In *Nonlinear signal and image analysis*(ed, by J. R. Buchler & H. Kandrup), Annals of New York Academy of Sciences, 808, 1-17.
- Baumol, W. J. and Benhabib, J. (1989) Chaos: Significance, mechanism, and economic applications. *J. Economic Perspectives* [Winter], 77-105.
- Baumol, W. J. and Wolf, E. N. (1983) Feedback form productivity growth to R & D. *Scandinavian J. Economics* 85, 147-157.
- Benhabib, J. and Day, H. (1980) Erratic accumulation. *Economics Letters* 6, 113-117.
- Brock, W. A., Dechert, W. D., and Scheinkman, J. A. (1987) A test for independence based on the correlation dimension. Working paper, Department of Economics, University of Madison, University of Houston, and University of Chicago.
- Brock, W. A., Hsieh, D. A., and LeBaron, B. (1991) *Nonlinear dynamics, chaos and instability: Statistical theory and economic evidence*. Cambridge: The MIT Press.
- Brown, G. B. and Smith, K. B. (1991) Ocean stirring and chaotic low-order dynamics. *Phys. Fluids A* 3(5), May, 1186-1192.
- Ciliberto, S. and Gollub, J. P. (1985) Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves. *J. Fluid Mech* 158, 381-398.
- Craig, S. G., Kohlhase, J. E., and Papell, D. H. (1991) Chaos theory and microeconomics: An application to model specification and hedonic estimation. *The Review of Economics and Statistics* [May], 208-215.
- Dana, R. A. and Malgrange, P. (1984) The dynamics of a discrete version of a growth model. In *Analyzing the structure of Econometric Models*, edited by J. P. Ancot., Amsterdam.
- Eckmann, J. P., Kamphorst, S. O., Ruelle, D., and Ciliberto, S. (1986) Lyapunov exponents from time series. *Phys. Rev. A* 34, 4971-4979.
- Essex, C., Lookman, T., and Nerenberg, M. A. H. (1987) The climate attractor over short timescales. *Nature* 326 [5 March], 64-66.
- Etheridge, H. L. and Sriram, R. S. (1993) Chaos theory and nonlinear dynamics: An emerging theory with implications for accounting reserch. *J. Accounting Literature* 12, 67-100.
- Feder, J. (1988) *Fractals*. Plenum Press.
- Freeman, R. N. and Tse, S. (1991) A nonlinear model of security price responses to unexpected earnings. Working paper. University of Texas at Austin.
- Gaponov-Grekhov, A. V., Rabinovich, M. I., Starobinets, I. M., Tsimring, M. S., and Chugurin, V. V. (1994) Ω -dimension of chaotic time series. *Chaos* 4(1), 55-62.
- Ghashgaie, S., Breyman, W., Peinke, J., Talkner, P., and Dodge, Y. (1996a) Turbulent cascades in foreign exchange markets. *Nature* 381 [27 June], 767-770.
- Ghashgaie, S., Breyman, W., Peinke, J., and Talkner

- P. (1996b) Turbulence and financial markets. In *Advances in Turbulence VI*, edited by S. Gavrilakis et al. Kluwer Academic Publishers.
- Grandmont, J. and Malgrane, P. (1986) Nonlinear economic dynamics: Introduction. *J. Economic Theory* 40, 3-12.
- Grassberger, P. and Proccacia, I. (1983a) Characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.* 50, 346-349.
- Grassberger, P. and Proccacia, I. (1983b) Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D* 9, 189-208.
- Hinch, M. J. and Patterson, D. M. (1985) Evidence of nonlinearity in daily stock returns. *J. Business & Economics Statistics* [January], 69-77.
- Hsieh, D. A. (1987) Testing for nonlinear dependence in foreign exchange rates. *J. Business* 62, 339-368.
- Hsieh, D. A. (1991) Chaos and nonlinear dynamics: Application to financial markets. *The J. Finance* [December], 1839-1877.
- Jaeger, L. and Kantz, H. (1996) Unbiased reconstruction of the dynamics underlying a noisy chaotic time series. *Chaos* 6(3), 440-450.
- Kennel, M. B., Brown, R., and Abarbanel, H. D. I. (1992) *Phys. Rev. A* 45,3403.
- Landa, P. S. and Chetverikov, V. I. (1988) On the evaluation of the maximum Lyapunov exponent from a single experimental time series. *Soviet Phys. Tech Phys.* 33, 236-268.
- Lorenz, E. N. (1963) Deterministic non-periodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20, 130-141.
- Malraison, G., Atten, P., Berge, P., and Dubois, M. (1983) Dimension of strange attractors: An experimental determination of the chaotic regime of two convective systems. *J. Phys. Lett.* 44, 897-902.
- Mandelbrot, B. B. (1997) *Fractals, Forms, Chance, and Dimension*. W. H. Freeman, San Francisco, USA.
- Merton, R. C. (1973) An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica* 41, 867-887.
- Moon, F. C. (1987) *Chaotic vibrations*. John Wiley & Sons. New York.
- Moon, F. C. and Li, G.-X. (1985) The fractal dimension of the two-well potential strange attractor. *Physica D* 17, 99-108.
- Palmar, A. J., Kropfli, R. A., and Fairall, C. W. (1995) Signatures of deterministic chaos in rada sea clutter and ocean surface winds. *Chaos* 5(3), 613-616.
- Pandey, V., Kohers, T., and Kohers, G. (1998) Deterministic nonlinearity in the stock returns of major European equity markets and the Unites States. *The Financial Review* 33, 45-64.
- Peitgen, H. O., Jurgens, H., and Saupe, D. (1992) *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*. Springer-Verlag, New York.
- Peters, E. E. (1996) *Chaos and Order in the Capital Markets*. John Wiley & Sons, Inc.
- Poveda-Jaramillo, G. and Puente, C. E. (1993) Strange attractors in atmospheric boundary-layer turbulence. *Boundary-Layer Meteorology* 64, 175-197.
- Priesmeyer, H. R., and Balk, K. (1989) Discovering the patterns of chaos. *Planning Review* [Number/December], 14-47.
- Sano, M. and Sawada, Y. (1985) Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series. *Phys. Rev. Lett.* 53, 1082-1085.
- Savit, R. (1988) When random is not random: An introduction to chaos in market price. *J. Futures Markets* [June], 270-290.
- Scheinkman, J. A. and LeBaron, B. (1989) Nonlinear dynamics and stock returns. *J. Business* 62, 311-337.

- Schwert, G. (1989) Business cycles, financial crisis and stock volatility, *Carnegie Rochester Conference Series on Public Policy* 31, 83-126.
- Stutzer, M. J. (1980) Chaotic dynamics and bifurcation in a macro model. *J. Economic Dynamics and Control* 2, 353-376.
- Swinney, H. L. (1983) Observation of order and chaos in nonlinear systems. In *Order and Chaos, Campbell and Rose* (eds), North-Holland, Amsterdam, 3-15.
- Takens, F. (1981) Detecting strange attractors in Turbulence. In *Leocure Notes in Mathematics* 898, Springer-Verlag, New York.
- Tsonis, A. A. and Elsner, J. B. (1988) The weather attractor over very short time-scales. *Nature* 333 9 [June], 545-547.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. and Vastano, J. A. (1985) Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D* 16, 286-317.

Chaotic Properties in the Korean Stock Returns

Sung-Kwan Huh* · Yong Kweon Suh**

Abstract

This paper empirically examines chaotic properties in the Korean stock returns. Prior studies analyzed the returns of value-weighted composite stock price index contained in the KIS-SMAT Data, and showed inconsistent results. In order to provide an additional evidence, this study analyzes daily returns of both value-weighted and equal-weighted composite stock price index of KSRI-Data. Six different industry stock returns are also analyzed. The time period of this study covers sixteen years starting from the beginning of 1980. The techniques undertaken to examine chaotic properties are the Hurst exponent, embedding of pseudo-phase-space, fractal dimension, and the Lyapunov exponent. Our results show that chaotic properties are not observed except the banking industry. This implies that the Korean stock returns are random and do not belong to a deterministic system. However, further studies are required to provide a solid evidence.

Key words: Stock price return, Chaos theory, Fractal, Lyapunov exponent

* Professor, Division of Management, Dong-A University)

** Professor, Department of Mechanical Engineering, Dong-A University)