223 경영학연구 제28권 제1호 1999년 2월(pp. 223~238)

2차 확률적 지배를 하는 가중치의 탐색에 관한 연구*
- 주식투자의 경우를 중심으로 -

류춘호
홍익대학교 경영대학 조교수
(ryuch@wow.hongik.ac.kr)

본 연구는 주식시장에서 투자종목을 선택할 때에 주로 사용되고 있는 '평균-분산(Mean-Variance) 접근방법'과는 달리, '확률적 지배(stochastic dominance)'의 개념을 적용하여 포트폴리오를 구성하는 방법을 연구하였다. 즉, 기준이 되는 확률분포(KOSPI)를 2차 확률적으로 지배하는 포트폴리오를 구성하는 최적가중치를 체계적으로 탐색하는 방법을 모색하였다. 각 포트폴리오의 가중치가 변하면서 두 확률분포의 누적분포함수 적분치 차이에 대한 일차 도함수를 분석적으로 구해서, 도함수기법을 이용하여 알고리즘을 개발하였으며, 이를 한국과 미국 주식시장으로부터의 실제 자료에 적용하여 그 효율성을 시험해 보았는데, 상당히 고무적인 결과를 얻었다.

I. 서 론

주식시장에서의 투자종목 선택과 같이 불확실성이 내재하는 상황에서의 의사결정에서는 다른 대안들보다 항상 우월한 결과를 주는 대안을 선택하는 것이 본질적으로 불가능하다. 그렇기 때문에 이러한 경우에는 확률적으로 우월한 결과를 주는 대안을 선택하는 것이 관심의 대상이 될 수 있다. 투자자들은 높은 수익률과 낮은 위험을 갖는 포트폴리오를 구성하려고 노력한다. 이러한 노력의 일환으로 대부분의 합리적인 투자자들은 한 종류의 자산에만 투자하기보다는 여러 종류의 자산에 분산 투자함으로써 투자에 따른 위험을 감소시키려고 하는데, 문제는 어떻게 분산 투자하는 것이 가장 바람직한 투자인가를 찾아내는 일이다. 이러한 포트폴리오 선택문제에는 '평균-분산(Mean-Variance) 접근방법'이 대표적으로 사용되고 있는데, 이는 위험에 대한 지표로서 포트폴리오 수익률의 표준편차를 사용하여 주어진 표준편차에서 최고의 기대수익을 갖는 포트폴리오를 구성하는 방법이다.

이러한 평균-분산 접근방법은 실제 확률분포가 정규분포와 같이 평균과 분산만으로 특징 지워지는 경우, 또는 투자자들이 확률분포의 평균과 분산 이외의 다른 특성들에 관해서 전혀 관심이 없는 경우에 한하여 개념적으로 유효하다. 따라서 자산수익률이 정규분포를 갖지 않거나, 또는 투자자들의 효용함수에 첨도(kurtosis) 등과 같은 확률분포의 다른 특성들이 영향을 미치는 경우, 평균-분산 방법은 실제 투자자들의 효용을 극대화하는 포트폴리오를 구성하는데 실패할 수도 있다. 예를 들어 매우 드물게 일어나는 시장폭락 사태를 투자자들이 염려할 경우, 투자자들이 느끼는 위험을 자산수익률의 표준편차만으로 설명하는 것이 부적절할 수 있다. 이러한 문제를 보완할 수 있는 방법으로서 '확률적 지배(stochastic dominance)' 개념이 도입되었다(류춘호 · 신성환, 1997).

확률적 지배 개념은 확률분포 자체를 비모수적

논문 접수일 : 98. 3   게재확정일 : 98. 10
* 이 논문은 1997학년도 홍익대학교 교내연구비에 의하여 연구되었음.

(nonparametric)으로 다룬다는 특징이 있다. 그 밖에도 확률적 지배 개념은 경제학 모형을 통하지 않고 변수들을 직접 비교한다는 특징도 갖는데, 이는 확률적 지배 개념이 복잡한 가정들을 필요로 하지 않음을 의미한다. 따라서 투자자들의 의사결정에 관한 기존의 재무학 모형에 비해 확률적 지배 개념은 결과에 대한 보다 단순하고 명확한 해석을 가능하게 한다는 장점을 갖는데, 이는 투자에 대한 벤치마크가 있을 때 매우 유용하게 사용될 수 있는 개념임을 나타낸다. 예를 들어, 특정 포트폴리오 수익률이 투자에 대한 벤치마크로 주어졌을 때, 이 벤치마크보다 모든 투자자들이 선호하는 포트폴리오를 구성할 수 있다면 투자자들의 목표는 사전적으로나마 달성되게 된다.

류춘호·신성환(1997)의 연구에서는 변수들의 실증분포(empirical distribution)로부터 특정 벤치마크 변수를 '2차 확률적으로 지배(second degree stochastic dominance)'하는 포트폴리오를 구성하는 방법을 간단히 살펴보고, 작은 규모의 예제에 적용해 봄으로써 그 가능성을 제시하였다. 본 연구에서는 2차 확률적 지배를 고려할 경우 최적화의 대상이 되는 함수에 대해서 최적성(optimality)의 일반화 여부를 검토하고, 제시된 알고리즘을 실제 데이터에 적용해서 그 효율성을 알아보고자 한다. 우선 확률적 지배의 두 가지 종류에 대해서 각각의 정의 및 특성과 투자에 대한 적용 등을 살펴 본 후, 최적화의 방법론 및 그에 따른 한계점에 대해서 검토하고, 그 다음으로는 2차 확률적 지배에 대해서 최적화의 대상 함수의 수학적 특성을 분석하여 전체최적성(global optimality)과 국부최적성(local optimality)을 검토하고, 이 알고리즘을 한국 및 미국의 주식시장으로부터의 실제 자료에 적용하여 그 효율성을 시험하였다.

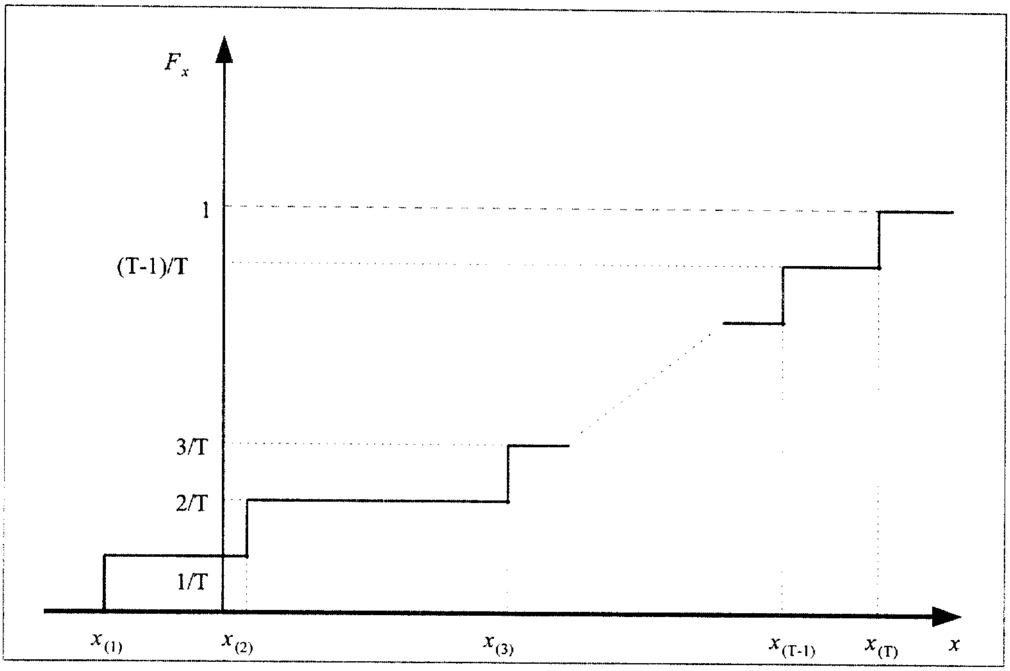
T개의 시점에 대한 n개의 주식들의 수익률이 주어져 있다고 할 때, n개의 주식으로 포트폴리오를 구성하려고 한다. 주식 i에 부여하는 가중치를 ω_i라고 하고, 각 시점 t에 대해서 n개의 주식들의 수익률의 가중합계를 X_t라고 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_t = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_{it}, \text{ where } \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1,\ \omega_i \in R\ \ \forall i. \tag{1}$$

여기서 R은 실수를 의미한다. 이렇게 만든 T개의 X_t를 표본으로 간주하고 각각의 표본에 1/T의 확률을 똑같이 부여해서 실증분포(empirical distribution)를 만들어 낼 수가 있으며, 이것으로부터 X_t의 누적분포함수(cumulative distribution function) $F_k(\cdot)$를 구할 수가 있다. 이렇게 되면 $F_k(\cdot)$의 모양은 〈그림 1〉에서 보는 것처럼, 왼쪽 연속인 계단함수(step function)가 된다. T개의 시점에 대한 KOSPI의 수익률 K_t에 대해서도 이와 같이 실증분포를 만들고 그로부터 누적분포함수 $F_k(\cdot)$를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_x(y) &= \Pr\{X_t \le y\} = \frac{p}{T}, \\ &\qquad \text{where } X_{(p)} \le y < X_{(p+1)}, \\ F_k(y) &= \Pr\{K_t \le y\} = \frac{q}{T}, \\ &\qquad \text{where } K_{(q)} \le y < K_{(q+1)}. \end{aligned} \tag{2}$$

〈그림 1〉에서 $X_{(t)}$는 X_t의 순서통계량(order statistics)으로서 크기가 작은 것부터 큰 순서대로 배열했을 때 t번째의 X_t를 의미하게 된다.



〈그림 1〉 누적분포함수 $F_x(\cdot)$

II. 확률적 지배

주식과 같은 '불확실한 자산(risky asset)'을 선택함에 있어서, 자산 A보다 자산 B를 선호하게 되는 조건이 무엇인지를 알아보기 위해서, 우선 두 종류의 '확률적 지배(stochastic dominance)'에 대해서 살펴보기로 하자. (Hadar & Russel, 1969), (Huang & Litzenberger, 1988), (Markowitz, 1952)

'모든 사람'이 자산 B보다 자산 A를 선호하거나 똑같다고 여길 경우, 자산 A가 자산 B를 '1차 확률적으로 지배(first degree stochastic dominance; FSD)'한다고 말한다. 즉, 자산 A의 수익률이 어느 수준에 대해서든 그 수준보다 높을 확률이 자산 B의 그 확률보다 크거나 같을 때를 말한다. 여기에는 인간의 욕구가 불포만적(nonsatiable)이라는 가정이 필요하게 되는데, 이는 인간의 효용이 계속 증가한다는 것이며 크게 무리는 없을 정도로 현실적이라고 하겠다. 이것은 효용함수(utility function)가 단조증가(monotonically increasing)하며, 일차 도함수(the first derivative)가 언제나 0보다 크다는 것을 의미한다.

이러한 1차 확률적 지배는 위험에 대한 투자자의 성향이 전혀 반영이 되어 있지 않다. 즉, 위험을 선호하는(risk-taking) 사람이든 위험을 싫어하는(risk-averting) 사람이든 1차 확률적 지배에 있는 자산을 선택하게 된다. 이것은 효용함수의 1차 도함수가 0보다 크기만 하면 되고, 2차 도함수가 0보다 크든(위험을 선호하는 사람) 작든(위험을 회

피하는 사람) 상관이 없다.

'불포만적이면서 위험을 싫어하는 사람들 모두'가 자산 B보다 자산 A를 선호할 경우, 자산 A가 자산 B를 '2차 확률적으로 지배(second degree stochastic dominance; SSD)'[1]한다고 말한다. $F_a(\cdot)$와 $F_b(\cdot)$를 각각 자산 A와 B에 대한 수익률의 누적분포함수(cumulative distribution function)라고 하면, 자산 A가 자산 B를 2차 확률적으로 지배할 경우 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{h} F_b(y)\,dy \ge \int_{-\infty}^{h} F_a(y)\,dy \quad \forall h, \text{ 또는}$$
$$\max_{h} \int_{-\infty}^{h} \{F_a(y) - F_b(y)\}dy = 0. \quad (3)$$

여기에는 인간의 욕구가 불포만적이라는 가정과 위험을 싫어한다는 가정이 모두 필요하게 되는데, 이는 효용함수의 일차 도함수가 언제나 0보다 크고, 2차 도함수가 항상 0보다 작다는 것을 의미한다. 이러한 경우 자산 B가 자산 A보다 더 위험하다(more risky)고 말하며, 위험을 싫어하는 사람들은 자산 A를, 위험을 선호하는 사람들은 자산 B를 선택하려고 한다.

1차 확률적 지배는 2차 확률적 지배보다 좀더 강한 조건을 가지고 있어서, 자산 A가 자산 B를 1차 확률적으로 지배하고 있다면 자산 A는 자산 B를 2차 확률적으로도 지배하게 된다. 그러나 이 역은 성립하지 않는다. 자산 A가 자산 B를 1차 확률적으로 지배하고 있는 경우에는 위험을 선호하는 사람이든 위험을 싫어하는 사람이든 똑같이 자산 A를 선택하지만, 2차 확률적으로 지배하고 있는 경우에는 위험을 선호하는 사람과 위험을 싫어하는 사람의 선택이 서로 달라서, 위험을 선호하는 사람은 자산 B를 선택하고, 위험을 싫어하는 사람은 자산 A를 선택하게 된다. 일반적인 투자자의 속성이 위험을 선호하기보다는 위험을 싫어하는 경향이 더 크기 때문에 1차 확률적 지배보다는 2차 확률적 지배가 주 관심사가 되기 때문에 여기서는 2차 확률적 지배만을 다루기로 한다.

III. 최적화방법론

KOSPI(Korea cOmposite Stock Price Index; 한국종합주가지수)를 2차 확률적으로 지배하는 포트폴리오를 구성하게 하는 가중치의 선택은 두 누적확률함수 아래 면적의 최대차이를 최소화하는 것이 될 수 있다. 즉, 포트폴리오의 누적분포함수의 아래 면적에서 KOSPI의 누적분포함수의 아래 면적을 뺀 차이의 최대값을 가장 작도록 하는 가중치를 선택하는 것이 된다. 이 최소값이 0인 경우에 한해서 KOSPI를 2차 확률적으로 지배하는 포트폴리오를 구성할 수가 있는데, 만일 이 최소값이 0보다 크다면 현재 고려하고 있는 n개의 자산들로는 2차 확률적 지배를 하는 포트폴리오를 구성할 수가 없다고 결론을 내릴 수가 있다. 2차 확률적 지배를 하는 가중치를 구하는 문제는 아래와 같이 정식화할 수 있다.

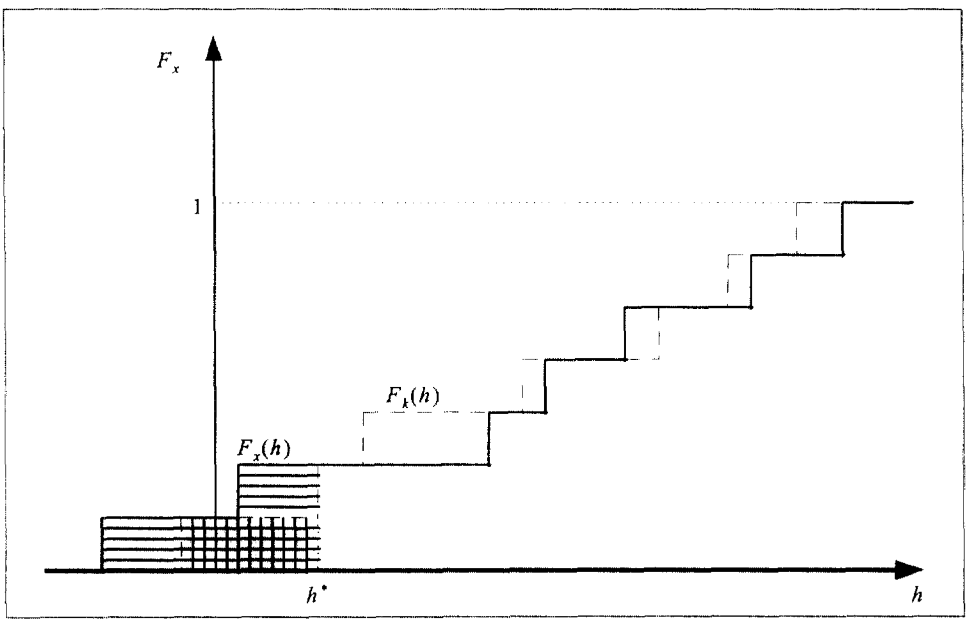
1) 이와 같은 것을 Huang & Litzenberger (1988)는 '2차 확률적 단조 지배(second degree stochastic monotonic dominance)'라고 정의하였지만 여기서는 그냥 '2차 확률적 지배'로 부르기로 한다.

$$(\mathrm{P}_2)\quad \begin{array}{ll} \underset{\omega}{\text{Minimize}} & \underset{h}{\max} \int_{-\infty}^{h} \{F_x(y) - F_k(y)\}dy \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\ & \omega_i \in R, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \end{array} \qquad (4)$$

여기서 가중치인 ω_i는 음수가 될 수도 있는데, 그것은 공매(空賣: short sale)의 경우로서 남의 주식을 빌려서 팔고 나중에 현금이 아닌 그 주식으로 다시 갚는 경우를 말한다. 비록 $F_x(\cdot)$와 $F_k(\cdot)$가 계단함수 형태를 갖는다 하더라도, 두 함수의 아래 면적의 최대차이는 매끄러운 곡면함수(curve function) 모양이 된다(〈그림 2〉 참조). 즉, ω가 조금만 변하더라도 두 함수의 값이 같은 구간을 제외하고는 아래 면적의 차이가 변하기 때문에 함수값이 달라지게 된다. 이 목적함수는 연속적인 일차 도함수가 존재하기는 하지만 아직 볼록함수임이 증명된 것은 아니므로 일차 도함수가 0이 되는 점에서 국지적(local)이 아닌 전체적(global)인 최소값을 가진다는 보장을 할 수는 없다. 그러나 이 함수가 이론적으로 가질 수 있는 가장 작은 값이 0이기 때문에, 도함수기법을 적용해서 구한 최종해의 함수 값이 0인 경우는 전체적인 최소값이라고 말할 수가 있다. 문제는 이러한 일차 도함수를 어떻게 ω_i로 나타낼 수 있느냐가 된다.

이 최적화문제를 (P)라고 하고, 목적함수를 $g(\omega)$라고 하면, 2차 확률적 지배에 대한 최적화문제는 $g(\omega)$를 최소로 하는 ω_i를 찾는 아래와 같은 문제가 된다.

$$(\mathrm{P})\quad \begin{array}{ll} \underset{\omega}{\text{Minimize}} & g(\omega) \\ & = \underset{h}{\max} \int_{-\infty}^{h} \{F_x(y) - F_k(y)\}dy \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\ & \omega_i \in R, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \end{array} \qquad (5)$$



〈그림 2〉 2차 확률적 지배에 대한 최적화

표본의 수는 시점 t의 수인 T이고, $g(\omega)$는 X와 K의 누적분포함수를 다루고 있으므로, 최대 2T개의 값에서만 그 함수 값을 계산하면 충분하다. 즉, 두 누적분포함수의 아래 면적의 최대차이는 2T개의 값들 중 하나에서만 발생하고, 그 다음 값이 나올 때까지는 이 최대차이가 그대로 유지되기 때문이다.

문제 (P)의 실행가능영역(feasible region)은 n차원 상의 초평면(hyperplane)이므로, 목적함수인 $g(\omega)$의 감소방향은 일차 도함수를 구해서 이 초평면에 투영시킨 것의 반대방향이 된다. 그러나 문제 (P)의 제약식이 등식이기 때문에 아래와 같이 ω_n을 치환하면,

$$\omega_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i. \tag{6}$$

문제 (P)는 제약식이 존재하지 않는 '무제약 최적화(unconstrained optimization)'의 문제로 바뀌게 되고, X_t도 아래와 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_{it} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i x_{it} + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i\right) x_{nt} \\ &= x_{nt} + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i (x_{it} - x_{nt}), \\ &\quad \text{where } \omega_i \in R, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1. \end{aligned} \tag{7}$$

$F_x(h)$와 $F_k(h)$의 아래면적의 차이가 최대가 되는 h를 h^*라고 하면, 다음과 같은 정리가 성립한다.

> **〈정리 1〉** 〔류춘호 · 신성환(1997)〕
> (1) h^*는 반드시 두 함수가 만나는 점에서 결정된다.
> (2) 특히 그 점은 X의 값이 아니라 K의 값이 되며, h^*의 값을 $K_{(t^*)}$라고 하면,
> $X_{(t^*)} \le K_{(t^*)} \le X_{(t^*+1)}$가 성립한다.

증명: 〔류춘호·신성환(1997)〕 참조.

$F_x(\cdot)$와 $F_k(\cdot)$를 $h^*(=K_{(t^*)})$까지 적분한 것은 아래와 같이 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{h^*} F_x(y)\,dy &= \sum_{t=1}^{t^*-1} \frac{t}{T}\,(X_{(t+1)} - X_{(t)}) \\ &\quad + \frac{t^*}{T}\,(K_{(t^*)} - X_{(t^*)}) \\ &= \frac{t^*}{T} K_{(t^*)} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*} X_{(t)} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{h^*} F_k(y)\,dy &= \sum_{t=1}^{t^*-1} \frac{t}{T}\,(K_{(t+1)} - K_{(t)}) \\ &= \frac{t^*-1}{T} K_{(t^*)} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*-1} K_{(t)}. \end{aligned} \tag{9}$$

그러므로

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{h^*} \{F_x(y) - F_k(y)\}\,dy \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*} K_{(t)} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*} X_{(t)} \end{aligned} \tag{10}$$

여기서 $X_{(t)}$를 구성하는 x_{it}를 $x_{i(t)}$라고 한 뒤, $X_{(t)}$를 ω_i의 표현으로 다시 바꾸면 목적함수는 아래와 같게 된다.

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \max_{h} \int_{-\infty}^{h} \{F_x(y) - F_k(y)\}\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{h^*} \{F_x(y) - F_k(y)\}\, dy \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*} K_{(t)} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*} X_{(t)} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*} K_{(t)} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*}\left[x_{n(t)} + \sum_{i=1}^{n-1}\omega_i(x_{i(t)} - x_{n(t)})\right] \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*} K_{(t)} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*} x_{n(t)} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*}\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i(x_{i(t)} - x_{n(t)}) \end{aligned} \tag{11}$$

결과적으로 문제 (P)는 아래와 같다.

$$\text{(P)} \quad \begin{aligned} &\underset{\omega}{\text{Minimize}} \quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*} K_{(t)} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*} x_{n(t)} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*}\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i(x_{i(t)} - x_{n(t)}) \\ &\text{s.t.} \quad \omega_i \in R, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1. \end{aligned} \tag{12}$$

여기서 목적함수의 ω_i에 대한 일차 도함수를 구하는 데에는 세 번째 항을 제외한 다른 모든 항을 상수로 취급할 수 있으므로, 일차 도함수는 아래와 같게 된다.

$$\nabla g_i(\omega) = \frac{\partial g(\omega)}{\partial \omega_i} = -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t^*}(x_{i(t)} - x_{n(t)}), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1. \tag{13}$$

문제 (P)가 $g(\omega)$를 최소로 하는 것이 목적이고 일차 도함수는 함수의 증가방향을 나타내므로, 개선 방향은 일차 도함수의 반대방향이 된다.

문제 (P)는 제약식이 없는 최적화문제이므로 목적함수 $g(\omega)$의 특성에 따라서 쿤-터커의 최적화 필요조건(Kuhn-Tucker necessary condition for optimality)을 만족하는 해가 전체최적(global optimal)인지 아니면 국부최적(local optimal)인지가 결정이 된다.

〈정리 2〉

(1) $g(\omega)$는 ω_i의 미세한 변화에 대해 함수 값이 급격히 변하지 않는다.

(2) $g(\omega)$는 임의의 ω에 대해서 항상 값을 가진다.

(3) $g(\omega)$는 연속함수(continuous function)이다.

(4) $g(\omega)$는 임의의 ω에 대해서 항상 편도함수(partial differential)가 존재한다.

증명: (1) ω_i의 값이 $\Delta\omega_i$만큼 변할 때, t*값이 변할 수도 있고 그대로일 수도 있다. t*값이 변하지 않을 경우 함수 값이 $\frac{\Delta\omega_i}{T}\sum_{t=1}^{t^*}(x_{i(t)} - x_{n(t)})$ 만큼 변한다. 수익률 x_{it}는 대부분 0에 가까운 수치인데 반해 T는 표본의 숫자로서 보통 260정도가 되므로, 위 값도 큰 값이 아니어서 함수 값의 변화가 급격하지 않다. t^*값이 변할 경우는 두 누적분포함수 아래 면적 차이가 최대가 되는 점이 K_{t^*}에서 $K_{t^{**}}$로 변하는 경우인데, ω_i의 값이 변하기 전에는 K_{t^*}까지의 면적 차이가 $K_{t^{**}}$까지의

면적 차이보다 컸다가, ω_i의 값이 변해가면서 그 크기가 같아졌다가 역전이 되는 경우이므로, 이 경우도 함수 값의 변화가 급격하지 않다고 할 수 있다.

(2) 식 (11)에서 보면, 시점 t에 대하여 이미 각 주식의 투자수익률 x_{it}와 KOSPI의 투자수익률 K_t가 주어져 있으므로, 임의의 ω에 대해서 $g(\omega)$는 항상 값을 가지게 된다.

(3) 임의의 $\omega^p \in R^{n-1}$에서 이 함수가 연속임을 보이기 위해서는 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 다음과 같은 $\delta > 0$가 존재함을 보이면 된다.

$$| g(\omega) - g(\omega^p) | < \varepsilon \text{ for all points } \omega \in R^{n-1} \text{ for which } d(\omega, \omega^p) < \delta.$$

Where $d(x, y)$ = distance between x and y. (14)

우선 ω^p의 i번째 성분인 ω_i^p값이 아주 조금 변할 때, 함수 값이 변할 수도 있고 변하지 않을 수도 있는데, 함수 값이 ε보다 충분히 작은 값(이를테면 ε/n^3)만큼 변화했을 때의 ω_i^p값의 변화분을 q라고 하자. 그러면 ω^p로부터 거리가 아주 가까운(이를테면 q/n^2) 점들의 함수 값은 (1)에 의해서 크게 변하지 않으므로 그 변화분이 ε보다 훨씬 더 작게 된다. 이 때 $\delta = q/n^2$라고 하면 이 δ는 식(14)를 만족한다. 그러므로 $g(\omega)$는 연속함수이다.

(4) $h \in R$이라고 할 때 임의의 ω_i에 대해서 아래 편도함수가 존재함을 보이면 된다.

$$\nabla g_i(\omega) = \lim_{h \to 0} \frac{g(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i + h, \ldots, \omega_{n-1}) - g(\omega)}{h} \quad (15)$$

우선 ω_i가 미세하게 변하더라도 t^*값이 변하지 않을 경우는 식 (15)의 분자 부분이 식 (13)의 편도함수에 h를 곱한 형태로 나오므로 분모의 h와 약분을 하고 나면 식 (13)의 편도함수만 남아서 편도함수가 존재하게 된다. 만일 ω_i가 조금이라도 변할 때 t^*값이 t^{**}로 변할 경우는 두 누적분포함수 아래 면적 차이가 최대가 되는 점이 K_{t^*}와 $K_{t^{**}}$ 두 군데가 있어서 값이 같은 경우이므로, t^*를 t^{**}로 바꾸어도 무방하므로 앞의 경우와 마찬가지로 편도함수가 존재한다. ★

〈추정 1〉

(1) $g(\omega)$는 볼록함수(convex function)이다.

해설: (1) 이를 증명하기 위해서는 아래의 식이 성립함을 보여야 한다.

$$\lambda g(\omega_1) + (1-\lambda) g(\omega_2) \geq g(\lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2) \quad \forall \omega_1, \omega_2,\ 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (16)$$

그러나 식 (12)에서 보면 $g(\omega)$는 $\omega_i\, x_{it}$와 K_t로 이루어진 순서통계량에 의해서 정의되므로 x_{it}와 K_t가 주어진 경우에 한해서만 정의가 될 수 있고, 함수 $F_x(\cdot)$와 $F_k(\cdot)$ 자체도 ω값이 변할 때마다 매번 달라지므로, ω_1, ω_2, 및 $\lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2$에 대한 $F_x(\cdot)$와 $F_k(\cdot)$)가 각각 서로 다른 함수가 되기 때문에 비교가 불가능하게 되어서, 임의의 데이터 x_{it}와 K_t에 대해서 식 (16)이 성립함을 보일 수가 없다. 다만 데이터가 주어져 있을 경우 $g(\omega)$의 함수모양이 어떤 형태를 갖는지는 추정해 볼 수 있다. 특히 포트폴리오를 구성하는 주식의 숫자가 3개 이하일 경우는 뒤에 나오는 예제에서 볼 수

있듯이 그림을 그릴 수 있으나, 그 숫자가 4개 이상이 되면 3차원 공간상에 그릴 수가 없기 때문에 함수모양을 추정해 볼뿐이다. 한 가지 방법으로 ω_1, ω_2, 및 λ를 무작위(random)로 생성하면서 식 (16)이 성립하는지의 여부를 조사해 보는 것을 들 수가 있다. 한국주식시장의 실제 데이터를 가지고, 선택대상 주식의 수를 2, 5, 10, 20, 30개인 경우 각각에 대해서 식 (16)의 성립여부를 10회에 걸쳐서 시험해 보았는데, 언제나 성립함을 확인하였다.

〈표 1〉은 그중 각 경우에 대해서 결과의 일부(5회)만을 보여주고 있는데, 네 번째 열(g_A)이 식 (16)의 좌측 항이고 다섯 번째 열(g_B)이 우측 항으로서 언제나 네 번째 열이 다섯 번째 열보다 크거나 같음을 알 수 있다. 그러나 위의 실험은 특정한 데이터에 대해서 그것도 한정된 횟수(10회)만을 검사하였기 때문에 이 실험만으로는 함수 $g(\omega)$가 볼록하다는 증명이 될 수가 없고, 다만 현재까지의 실험결과가 볼록이 아닌 경우가 나타나지 않았으므로, 함수 $g(\omega)$가 볼록한 함수일 거라

〈표 1〉 $g(\omega)$의 볼록성 검사

주식 수	횟수	λ	$g(\omega_1)$	$g(\omega_2)$	g_A^{*}	g_B^{*}
2	1	0.2320	0.3746	0.3645	0.3668	0.3102
	2	0.2287	0.3382	0.3430	0.3419	0.3055
	3	0.8133	0.3085	0.3588	0.3179	0.2927
	4	0.3770	0.4419	0.4259	0.4320	0.4319
	5	0.7869	0.4691	0.3369	0.4410	0.3838
5	1	0.5773	0.7661	0.7372	0.7538	0.6143
	2	0.3387	0.5056	1.5004	1.1635	1.1380
	3	0.1455	0.6169	0.3769	0.4118	0.3750
	4	0.0367	0.9093	0.4562	0.4728	0.4474
	5	0.6765	0.8588	0.4332	0.7212	0.6818
10	1	0.4988	0.9005	0.8695	0.8849	0.5589
	2	0.0293	0.7783	0.6334	0.6377	0.5972
	3	0.3044	0.8179	1.4742	1.2744	0.9957
	4	0.5663	0.7183	1.1290	0.8964	0.3374
	5	0.6823	1.2539	1.3196	1.2748	1.2126
20	1	0.5221	2.1666	1.0759	1.6453	1.4121
	2	0.7519	1.1070	0.9812	1.0758	0.8997
	3	0.9490	1.1298	1.1689	1.1318	1.0615
	4	0.8243	2.3813	1.4566	2.2189	2.1585
	5	0.7138	0.8116	0.9293	0.8453	0.7034
30	1	0.7697	1.9884	1.1146	1.7872	1.4612
	2	0.8386	1.1847	2.4322	1.3861	0.8373
	3	0.2536	1.6288	1.4317	1.4817	1.0015
	4	0.1945	2.4622	1.3153	1.5383	1.3157
	5	0.4659	1.0744	1.5647	1.3363	1.0589

*: $g_A = \lambda g(\omega_1) + (1-\lambda) g(\omega_2)$, $g_B = g(\lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2)$

고 추정할 수 있을 따름이다. ★

〈정리 2〉와 〈추정 1〉로부터 $g(\omega)$는 어디서나 도함수가 존재하는 볼록함수라고 볼 수 있기 때문에, 문제 (P)는 도함수가 0이 되는 점에서 최소값을 가진다고 볼 수 있다.

〈정리 3〉

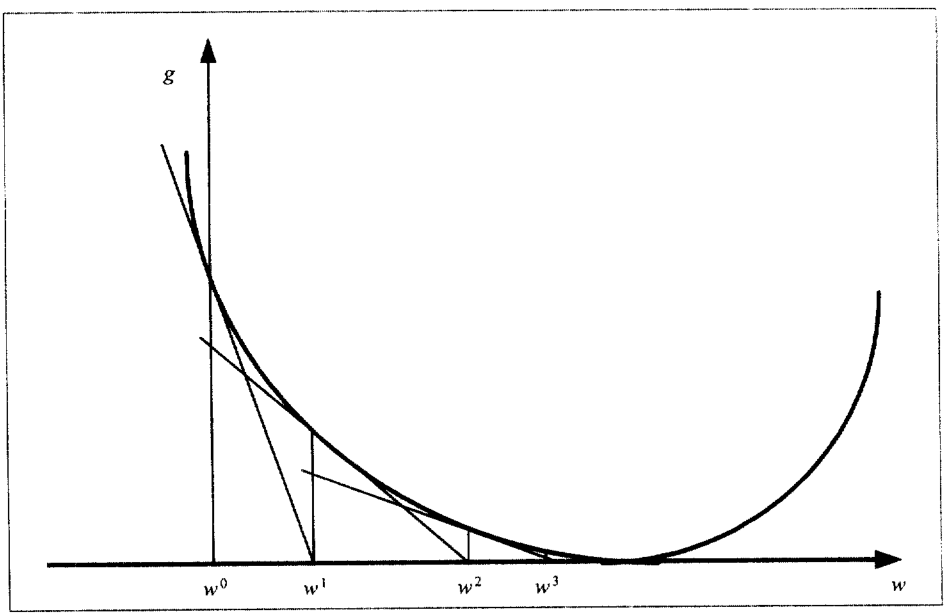
(1) $g(\omega) \geq 0 \qquad \forall \omega \in R^{n-1}$.

(2) $g(\omega)$의 값이 0이면 전체최적(global optimal)이 된다.

증명: (1) $g(\omega)$는 식 (13)의 정의에서 볼 수 있듯이 함수 $F_x(\cdot)$와 $F_k(\cdot)$의 아래 면적의 최대차이를 나타내고 있다. 이 차이가 음수가 되는 경우는 $F_x(\cdot)$ 전체가 $F_k(\cdot)$ 아래에 위치할 때를 들 수 가 있는데, 이 경우에도 h가 X_i나 K_i의 값이 존재하는 구간에 위치하면 두 면적의 차이가 음수가 되지만, h가 $-\infty$이면 그 차이가 0이 되기 때문에 이 경우의 $g(\omega)$값은 0이 된다. 즉, 어떠한 경우라도 $g(\omega)$의 값은 0보다 작을 수가 없다.

(2) 〈정리 3〉의 (1)로부터 $g(\omega)$의 이론적인 최소값이 0이므로, 이 값이 0이면 $g(\omega)$가 볼록이든 아니든 상관없이 최소가 되며, 이는 국부적(local)이 아닌 전체적(global)인 최소가 된다. ★

〈정리 2〉, 〈정리 3〉, 및 〈추정 1〉로부터, 문제 (P)에 대해서 도함수기법(gradient method)(Minoux, 1986, pp.84-85 참조)을 적용하면 최적해를 쉽게 찾을 수가 있다. 〈그림 3〉에서와 보는 바와 같이 이 기법은 일차 도함수를 이용하여 축차적으로 다음 해를 구하게 된다. ω^{old}에서의 일차 도함수를 $\nabla g(\omega^{old})$라고 하면 새로운 점 ω^{new}는 아



〈그림 3〉 도함수 기법의 원리

래와 같이 쉽게 구할 수가 있다. 초기해는 편의상 원점이나 모든 가중치가 1/n로 같은 점이면 된다.

$$\omega^{\text{new}} = \omega^{\text{old}} - \lambda \frac{g(\omega^{\text{old}})}{\|\nabla g(\omega^{\text{old}})\|^2} \cdot \nabla g(\omega^{\text{old}}) \tag{17}$$

여기서 λ의 값을 우선은 1로 고정시켜 놓고서 알고리즘을 적용하게 되는데, $g(\omega)$의 값이 0이면 최적해에 도달한 것이 된다. 그러나 $g(\omega)$의 최소값이 0이 아닌 경우에는 이대로는 최소값으로 수렴하지 않으므로, 이 알고리즘이 최소값을 찾아갈 수 있도록 일정 회수를 반복해도 $g(\omega)$의 값이 작아지지 않을 경우는 λ의 값을 점점 줄여가면서 움직임을 조정해야 한다. 아울러 도함수기법은 최소값을 알고 있다고 가정을 하고 있기 때문에 위의 경우에는 현재까지의 최선의 값과 0의 중간 값을 최소값으로 정정하는 조치도 함께 이루어져야 하는 등의 여러 가지 조정이 필요하게 된다.

Ⅳ. 예 제

〈표 2〉와 같이 A에서 C까지 세 개 회사 주식의 5주 동안의 수익률과 주식시장 전체(KOSPI)의 평균수익률이 주어졌을 때, 이 세 개 회사의 주식을 어떠한 가중치로 투자하는 것이 KOSPI를 확률적으로 지배하는 포트폴리오를 구성하는 것인지를 살펴보자.

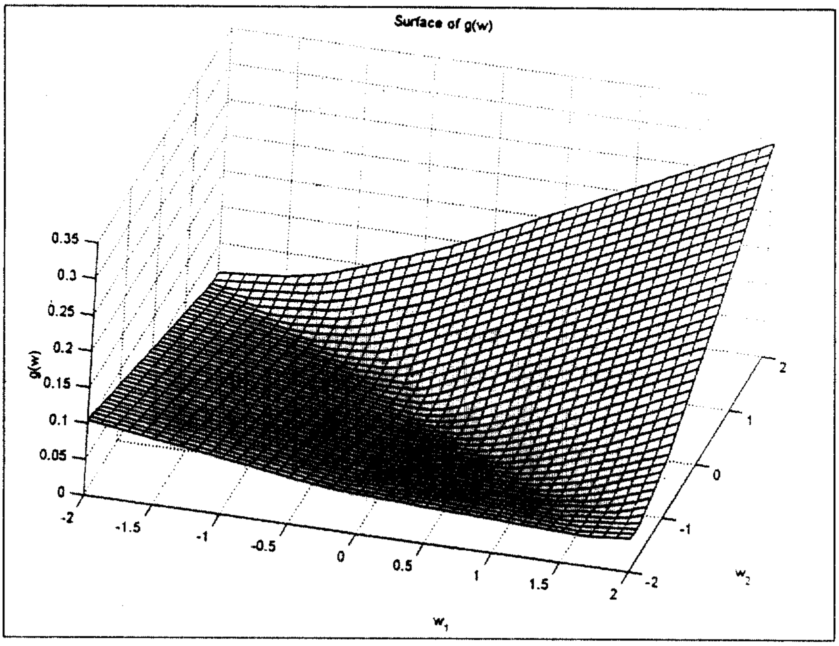
우선 각 기간의 확률은 0.2(즉, 1/5)로 동일하므로 KOSPI의 확률밀도함수(probability density function)인 $f_k(\cdot)$는 모든 기간에 대해서 0.2로 동일하다. 그러므로 KOSPI의 누적분포함수(cumulative distribution function)인 $F_k(\cdot)$는 KOSPI의 수익률을 크기의 역순으로 나열한 후 각각에 대해 0.2씩 증가해 가는 모양이 된다. 포트폴리오의 경우도 임의의 가중치에 대해서 각 기간별 대상 회사의 가중평균 수익률을 구해서 KOSPI의 경우와 같이 $f_x(\cdot)$와 $F_x(\cdot)$를 구할 수가 있다.

〈표 2〉 기간별 수익률

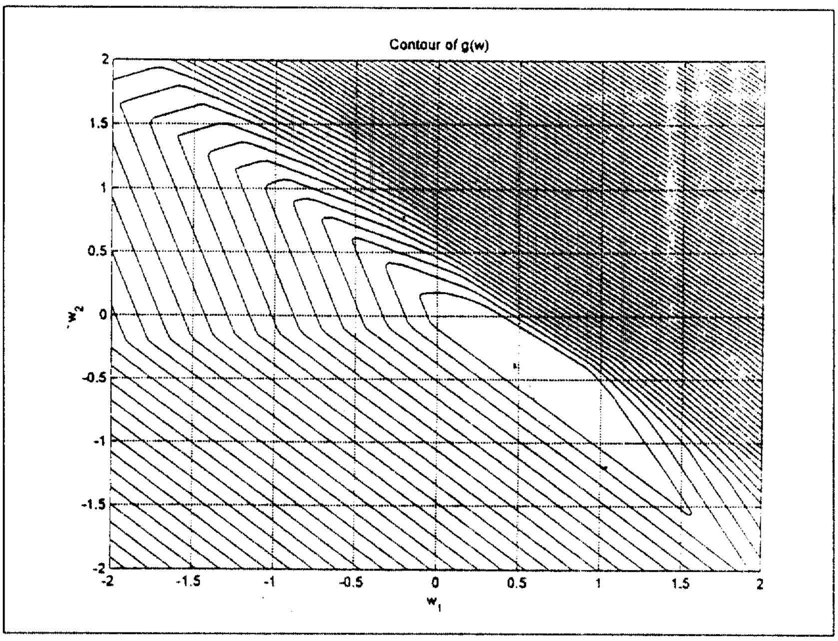
기간	A	B	C	KOSPI
1	-.0564	.0697	.0766	.00000
2	-.0378	-.0305	-.1281	.00208
3	.0062	-.1281	-.1142	-.03245
4	.0350	-.0626	-.1013	-.05153
5	.0597	-.0848	-.0358	.00950

회사 A, B, C에 대한 가중치를 각각 ω_1, ω_2, ω_3라고 하면 $\omega_3 = 1 - \omega_1 - \omega_2$로 치환할 수가 있고, ω_1과 ω_2만 결정하면 충분하므로, $g(\omega)$는 (ω_1, ω_2)평면상에 나타낼 수가 있다. 〈그림 4〉는 $g(\omega)$의 함수 표면이 어떻게 생겼는지를 보여주고 있고, 〈그림 5〉는 등고선으로 함수 값을 보여주고 있는데, 등고선이 동심원을 그리고 있는 것으로 미루어 $g(\omega)$가 볼록(convex)인 것으로 판단할 수 있다.

이 알고리즘이 어떻게 움직이는지를 살펴보기 위해서 〈표 2〉의 예제에 적용해 보면 다음과 같은 결과를 얻게 된다. 우선 $g(\omega)$값의 상한(UB)을 무한대(∞)로 초기화하고, KOSPI로부터의 자료(K_t)를 값이 작은 것부터 큰 것의 순서대로 재배열하여 순서통계치($K_{(t)}$)를 만든다. 단계 1을 살펴보면, 가중치의 초기해(ω^0)를 원점(0,0)으로 했으므로, ω_3^0는 1.0이 되어서, X_t는 C회사의 수익률과 동일하게 되고, 이를 순서통계치($X_{(t)}$)로 만든 후 함수값 $g(\omega^0)$와 일차도함수 $\nabla g(\omega^0)$를



〈그림 4〉 $g(\omega)$의 함수모양



〈그림 5〉 등고선으로 표시된 $g(\omega)$

계산한다. 새로운 함수값이 생겼으므로 UB를 개선 (update)한 후, 일차도함수의 반대방향으로 움직여서 새로운 해(ω^1)를 구한다. 단계 2로 가서 이 해의 함수값 $g(\omega^1)$이 0이 아니므로 단계 1과 같은 절차를 반복한다.

* UB = ∞
  K_t=(0.0000, 0.0021, -0.0325, -0.0515, 0.0095)
  $K_{(t)}$=(-0.0515, -0.0325, 0.0000, 0.0021, 0.0095)

1. $\omega^0 = (\omega_1^0, \omega_2^0)$=(0.0, 0.0). 즉, ω_3^0=1.0
   X_t=(0.0766, -0.1281, -0.1142, -0.1013, -0.0358)
   $X_{(t)}$=(-0.1281, -0.1142, -0.1013, -0.0358, 0.0766)
   $g(\omega^0)$=0.0595, $\nabla g(\omega^0)$=(-0.0885, -0.0147)
   UB = min { UB, $g(\omega^0)$ }
   = min { ∞, 0.0595 } = 0.0595
   $$\omega^1 = \omega^0 - \frac{g(\omega^0)}{\|\nabla g(\omega^0)\|^2}\cdot\nabla g(\omega^0)$$
   = (0.0, 0.0) - (0.0595/0.0080)*(-0.0885, -0.0147)
   = (0.6543, 0.1085).
2. $\omega^1 = (\omega_1^1, \omega_2^1)$ = (0.6543, 0.1085).
   즉, ω_3^1 = 0.2372.
   X_t = (-0.0112, -0.0584, -0.0369, -0.0079, 0.0214)
   $X_{(t)}$= (-0.0584, -0.0369, -0.0112, -0.0079, 0.0214)
   $g(\omega^1)$ = 00065, $\nabla g(\omega^1)$
   = (-0.0428, -0.0231)
   UB = min { UB, $g(\omega^1)$ }
   = min { 0.0595, 0.0065 }
   = 0.0065
   $$\omega^2 = \omega^1 - \frac{g(\omega^1)}{\|\nabla g(\omega^1)\|^2}\cdot\nabla g(\omega^1)$$
   = (0.6543, 0.1085) - (0.0065/0.0024)*(-0.0428, -0.0231)
   = (0.7721, 0.1721).
3. $\omega^2 = (\omega_1^2, \omega_2^2)$ = (0.7721, 0.1721).
   즉, ω_3^2 = 0.0558.
   X_t = (-0.0273, -0.0416, -0.0236, 0.0106, 0.0295)
   $X_{(t)}$ = (-0.0416, -0.0273, -0.0236, 0.0106, 0.0295)
   $g(\omega^2)$= 0.0017, $\nabla g(\omega^2)$ = (-0.0155, -0.0154)
   UB = min { UB, $g(\omega^2)$ }
   = min { 0.0065, 0.0017 }
   = 0.0017
   $$\omega^3 = \omega^2 - \frac{g(\omega^2)}{\|\nabla g(\omega^2)\|^2}\cdot\nabla g(\omega^2)$$
   = (0.7721, 0.1721) - (0.0017/0.0005)*(-0.0155, -0.0154)
   = (0.8275, 0.2269).
4. $\omega^3 = (\omega_1^3, \omega_2^3)$ = (0.8275, 0.2269).
   즉, ω_3^3 = -0.0544.
   X_t = (-0.0350, -0.0312, -0.0177, 0.0203, 0.0321)
   $X_{(t)}$ = (-0.0350, -0.0312, -0.0177, 0.0203, 0.0321)

$$g(\omega^3) = 0.0000.$$

단계 4에서는 현재 해(ω^3)의 함수값 $g(\omega^3)$가 0이므로 알고리즘을 종료하고, 현재의 해인 (ω_1^3, ω_2^3, ω_3^3) = (0.8275, 0.2269, -0.0544)가 최적해가 된다. 즉, 현재 총투자액의 82.75%를 A회사의 주식에 투자하고, 22.69%를 B회사의 주식에 투자하면 된다. C회사 주식의 가중치가 음수인 것은 앞에서 소개한 바와 같이 공매(short sales)의 경우로서, 5.44%는 C회사의 주식을 다른 사람으로부터 빌려서 매도를 하고 나중에 그 주식으로 갚기로 하는 것을 의미한다.

이 예제는 $g(\omega)$의 최소값이 0이기 때문에 위와 같이 단계 4에서 알고리즘이 종료되었지만, 만일 이 최소값이 0이 아닌 경우에는 비록 현재의 해가 최소값에 도달했다고 하더라도 끝나지 않고 그 값 주변을 왔다갔다하게 된다. 이럴 때는 일정 회수(예를 들면 5회)를 반복해도 함수값이 개선되지 않으면 λ의 값을 반으로 줄여서 한 번에 움직이는 거리를 줄이게 된다. 이와 같이 움직임을 계속 조정해 가면 도함수기법은 최소값을 찾아갈 수가 있다.

V. 계산 결과

이 알고리즘이 어떻게 움직이고 어느 정도 효과적인지를 살펴보기 위하여, 한국과 미국의 주식시장으로부터 나온 실제 주식수익률 자료에 알고리즘을 적용해 보았다. 앞의 예제에서는 3개 회사의 5주간의 자료를 가지고 아주 작은 문제를 다루었지만, 현실적으로는 약 30개 정도 회사의 5년간(260주)의 자료를 처리할 수 있어야 된다고 한다. 한국과 미국의 주식시장에서 구한 실제 자료로부터 임의로 30개 회사를 선택해서 260주 동안의 자료에 대해서 알고리즘을 적용해 보았는데, 최적해에 도달하기까지의 반복(iteration) 회수와 컴퓨터 CPU시간을 살펴보고, 다시 임의로 30개 회사를 선택해서 적용하기를 30회 반복하였으며, 미국 주식시장으로부터의 실제 자료에도 이와 동일한 작업을 한 결과가 〈표 3〉과 같게 나타났다.

첫 번째 열은 총 20번에 걸쳐서 무작위로 30개의 회사를 골라서 만든 자료군의 순서를 나타내고, 두 번째 열은 한국 주식시장으로부터의 자료에 대해서 이 알고리즘을 적용했을 때의 반복(iteration) 회수, 즉 단계의 숫자를 나타내며, 세 번째 열은 알고리즘이 시작해서 최소값을 찾는 데까지 걸린 시간을 컴퓨터 CPU 시간(초)으로 표시한 것이다. 네 번째 열과 다섯 번째 열은 미국 주식시장으로부터의 자료에 대해서 한국 자료의 경우와 같은 방식으로 적용한 결과를 보여주고 있다. 예를 들면, 첫 번째 줄의 경우, 총 20번에 걸쳐 무작위로 30개의 회사를 추출하여 만든 자료 중 첫 번째 자료로서, 이 자료에 알고리즘을 적용해 본 결과, 55번의 반복 후에, 즉 단계 56에 가서 알고리즘이 종료되었고, 그 때까지 걸린 컴퓨터 CPU 시간은 3.67초이며, 미국 자료의 경우는 12번을 반복하고서 종료되었고, CPU 시간이 0.83초임을 보여주고 있다.

〈표 3〉에서 보는 바와 같이 평균 반복회수가 20회 미만이며, 컴퓨터 CPU 시간의 평균도 1초 정도에 불과하여, 이 결과만을 놓고 보면 알고리즘이 대단히 성공적이라고 볼 수 있다고 하겠다. 그러나 인위적으로 최소값이 0이 되지 않도록 만든 자료에 대해서는 반복 회수가 200회까지 가는 경우도 있어서, 좀더 다양한 자료에 대한 충분한 실험결과가 없이는 알고리즘이 잘 작동할 거라고 섣부른 결

〈표 3〉 알고리즘의 적용 결과

국가 / 회	한 국		미 국	
	반복회수	CPU (초)	반복회수	CPU (초)
1	55	3.67	12	0.83
2	8	0.50	14	1.10
3	15	0.99	13	0.82
4	10	0.71	10	0.77
5	26	1.65	9	0.61
6	33	2.19	20	1.42
7	6	0.39	5	0.33
8	6	0.33	43	2.86
9	17	1.10	10	0.77
10	32	1.98	17	1.21
11	7	0.44	77	4.78
12	32	2.04	35	2.97
13	8	0.48	9	0.60
14	5	0.28	6	0.44
15	19	1.16	6	0.39
16	21	1.37	28	1.98
17	13	0.88	17	1.27
18	9	0.61	8	0.55
19	6	0.44	5	0.33
20	12	0.82	6	0.44
21	17	1.10	4	0.27
22	9	0.55	7	0.44
23	4	0.26	8	0.55
24	24	1.43	24	1.81
25	14	0.94	7	0.49
26	5	0.33	15	1.05
27	4	0.27	9	0.60
28	51	4.07	9	0.66
29	7	0.43	9	0.61
30	12	0.83	26	1.98
평균	16.2	1.07	15.6	1.10
표준편차	13.2	0.94	14.9	0.99

*PC Pentium 75MHz, MATLAB 이용

론을 내리기는 어렵다고 하겠다. 더욱이 이러한 현상은 가중치가 음수가 될 수도 있다는 가정 덕분인데, 만일 공매를 허용하지 않는다면, 최소값이 0이 되지 않는 경우가 허다하게 발생하므로 최적화의 방법도 새로이 모색을 해야 할 것이다.

Ⅵ. 결론 및 향후 연구방향

이상에서 우리는 변수들의 실증분포(empirical distribution)로부터 어떤 기준분포(KOSPI)를 2차 확률적으로 지배하는 포트폴리오를 구성하는 방법을 모색하여, 이 방법을 한국 및 미국의 주식시장에 적용해보았는데, 상당히 고무적인 결과를 얻었다. 특히 가중치에 의해 변하는 두 함수의 아래 면적의 최대차이에 대한 일차 도함수를 가중치의 함수로 직접 나타낼 수 있었다는 것이 조그만 소득이라고 하겠다.

이 알고리즘의 개발로 주식시장이나 선물시장 등에 있어서의 포트폴리오를 구성하는 종목을 선택할 때 참고할 수 있는 중요한 선택기준을 제공할 수 있으며, 나아가서 2차 확률적으로 지배하는 가중치를 필요로 하는 특성을 가지는 다른 분야, 즉 생산현장이나 통계학 분야 자체에서도 활용이 가능할 것으로 기대된다.

앞으로는 여러 자료에 대해서 이 알고리즘을 실험해 보면서 좀더 우수한 초기해의 선정 방법을 모색하고, 최소값이 0이 아닌 경우를 대비한 여러 가지 조정작업 등에 대한 개선을 모색해 보고자 한다. 그리고 가중치가 비음인 경우는 실수인 경우보다 현실적으로 알고리즘의 개발이 쉽지가 않기 때문에, 이 알고리즘이 모든 가중치가 비음이라는 제약 하에서는 어떻게 수정되어야 하는지도 검토의 대상이다. 아울러 2차 확률적 지배보다 훨씬 더 강한 의미의 1차 확률적 지배에 대한 알고리즘의 개발도 본 연구에서는 제외되었지만 충분히 의미가 있다고 하겠다.

참 고 문 헌

류춘호・신성환 (1997), "최적 포트폴리오 구성에 관한 연구", **경영연구**, 홍익대학교 경영연구소, 22, 363-378.

Hadar, J. & W. Russel (1969), "Rules for Ordering Uncertain Prospects," *American Economic Review*, 59, 25-34.

Huang, C. & R.H. Litzenberger (1988), *Foundations for Financial Economics*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, Inc..

Markowitz, H. (1952), "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, 7, 77-91.

Minoux, M. (1986), *Mathematical Programming: Theory and Algorithms*, New York, NY, John Wiley & Sons, Ltd..

An Algorithm to Optimize Weights for the Second Degree Stochastic Dominance

Choonho Ryu*

Abstract

'Mean-Variance' approach is often used in forming a good portfolio so that it has the highest expected return given a certain level of variance or it has the lowest variance given a certain level of expected return. This study, however, was to use 'stochastic dominance' approach instead, which is to form a portfolio that second-order stochastically dominates a predetermined benchmark portfolio (e.g., KOSPI). A first derivative is defined at every point of weights analytically. An optimal algorithm was developed on PC in order to search a set of optimal weights for the second-degree stochastic dominance systematically. This algorithm was tested against the real data sets from the stock markets of Korea and U.S.A. and a promising result came out.

* Department of Business Administration, Hong-ik University