經營學研究 第25卷 3號(1996年 8月)

韓國證券 收益率의 混合 擴散跳躍過程 假說의 檢證

성 삼 경*
박 정 수**
조 용 대***

논문접수일 : 95. 8
게재확정일 : 96. 4

초 록

본 논문에서는 혼합 확산도약과정의 통계적 특성을 설명하고 한국 증권수익률의 분포를 어느 정도 잘 설명하는지를 검증하였다. 종합주가지수와 20개의 개별적 주식을 선택하여 혼합 확산도약과정의 모수를 최대우도법으로 추정했으며 적합도검정으로는 콜모고로프-스미르노프검정을 이용하여 실시하였다.

한국 증권수익률의 생성과정에도 도약과정이 존재함을 보이고 혼합 확산도약과정이 지금까지 한국 증권수익률의 분포를 설명하는 데 가장 유력한 후보로 생각되었던 혼합 정규분포에 필적하는 후보임을 밝히면서 아울러 그 의미를 논하였다.

* 고려대학교 경영학과 교수
** 전남대학교 통계학과 부교수
*** 고려대학교 기업경영연구소 연구원

Ⅰ. 序　　論

투기시장의 가격변화에 대한 분포의 양상을 완전히 파악해야 시장의 운영원리를 이해할 수 있고 포트폴리오 위험(portfolio risk)을 정확히 규정할 수 있으며 그에 따른 적절한 통계기법을 선택하여 사용해야만 올바른 시장분석을 할 수 있다. 資本資産價格決定의 이론적 모형(capital asset pricing model : CAPM)과 狀態條件附請求權(contingent claim)의 가격결정 그리고 옵션가격결정모형(option pricing model : OPM)들은 주식수익률의 분포형태와 분산의 형태에 대한 이해가 전제된다. 예를 들면, 분산의 행태(behavior)에 대한 이해는 옵션가격결정모형의 설정에 필수적이다.

일반적으로 주식수익률의 분포가 정규분포를 이탈하는 것으로 잘 알려져 있으므로 본 논문에서는 이에 대한 대체안적인 분포모형으로서의 혼합 확산도약과정모형에 대한 설명력을 제시하는 데 그 목적이 있다.

지금까지의 수익률분포모형에 관한 연구를 살펴 보면 다음과 같다. 켄달(Kendall, 1953)은 영국 증권시장과 시카고의 선물시장의 밀의 가격변화는 정규분포에 근사하다는 연구결과를 발표했다. 맨델브롯(Mandelbrot, 1963)은 투기시장의 가격변화의 분포는 실제로 정규분포보다 중앙부분이 더욱 높고 뾰족하며 양 꼬리 부분은 더욱 밀도가 높아 정규분포보다 두꺼운 꼬리를 갖는 모습을 보인다고 밝혔다. 그는 정규분포보다는 無限分散을 갖는 비정규 안정파레시안분포(nonnormal stable Paretian distribution)가 오히려 투기적 거래를 잘 설명하고 있고 실제표본의 분포에도 적합하다는 연구를 했다. 면화 선물시장에 대한 이러한 맨델브롯의 연구를 필두로 파마(Fama, 1963, 1965)는 1959년 12월에서 1962년 9월까지의 다우존스산업평균(Dow Jones Industrial Average)의 30개 증권의 일일주가는 비정규 안정파레시안 분포에 가깝다는 시사를 했고, 롤(Roll, 1970)은 미국 정부 재무성증권(Treasury Bill)가격변화가, 두삭(Dusak, 1981)은 선물가격 변화가, 웨스터필드(Westerfield, 1977)는 외환시장의 주별 가격변화가 안정파레시안 분포를 따른다는 경험적 증거를 발표했다. 맥파랜드, 페티트 와 성(McFarland, Pettit and Sung, 1982)은 외환시장의 주별가격변화에서는 웨스터필드를 지지하나 일별가격변동에서는, 거래일 효과(trading day effect)를 검증하고 단일한 분포가 아닌

혼합분포의 가능성을 시사한 바 있다.

블랫버그와 고네디스(Blattberg and Gonedes, 1974)는 다우존스 산업평균에 해당하는 주식 중에서 30개의 주식을 선정하여 이들 주식 각각에 대해서 일별수익률자료를 이용하여 t-分布(scaled t-distribution)와 안정파레시안분포의 깊이 있는 비교를 했다. 그 결과 t-분포의 모형이 대칭적 안정파레시안분포모형보다 설명력이 크다는 것을 명백히 했다. 흐수, 밀러와 휘천(Hsu, Miller and Wichern, 1982)은 세계 제 2 차 대전 前은 비정규, 戰後는 정규에 가까운 상반된 결과로 결국 단일 확률분포의 개념에 이의를 제기했다. 안정파레시안 분포가설은 주식수익률의 분포가 비대칭적이라는 연구결과와 모수추정방법의 개발로 쇠퇴하고 대신 혼합된 안정파레시안분포모형이 제시되었으나 이 모형도 확률밀도함수를 파악할 수 없다는 이론적 취약점과 함께 실증검사 결과 대체로 부정되고 있다.

크리스티(Christie, 1982)는 비정보확률변수들(noninformation random variables)과 정보사건(information events)들로 나타내어지는 이산적 2혼합 정규분포모형(discrete mixture of two normal distributions model)을 발표했고 볼과 토로어스(Ball and Torous, 1983)는 정보의 도달을 설명하기 위하여 베르누이 도약과정(Bernoulli jump process)으로부터 나온 일별수익률에 대한 2혼합 정규분포모형과 일치하는 증거를 제시한다. 한편 콘(Kon, 1984)은 블랫버그와 고네디스의 t-분포와 혼합 정규분포를 비교하여 혼합 정규분포의 우월한 適合性을 보여 주고 있다. 최근에는 터커와 폰드(Tucker and Pond, 1988)가 외환시장에서 陜기레이, 부쓰와 로이스틀(Akgiray, Booth and Loistl, 1989)이 증권시장에서 어떤 분포보다도 혼합 확산도약과정(mixed diffusion-jump process)모형이 가장 적합성이 높음을 보여 주고 이론적으로도 밑받침하고 있는 실정이다.

우리나라의 투기시장인 증권시장의 가격변동의 분포를 파악하기 위한 연구로는 조담(1979), 심병구외 3인(1980), 그리고 윤계섭(1981)의 연구에서 모두 정규분포를 부정하는 결론이었고 지청(1982)은 정규분포보다는 尖度가 높은 분포임을 밝혔다. 성삼경과 안진철(1986)은 일별주식수익률분포가 정의 편도와 첨도가 높아 정규분포가 아님은 물론 대칭인 안정파레시안분포의 가설도 기각됨을 보이고 t-분포(scaled t-distribution)나 혼합 정규분포의 가능성을 시사한 바 있다. 또한 김대훈(1988)은 비대칭적 안정파레시안분포로도 한국의 증권수익률의 변동을 설명할 수 없음을 보여 주었고 김선웅(1988) 및 이필상과 안동현(1991)은

혼합 정규분포가 우리나라의 증권수익률의 변동을 잘 설명한다는 것을 보여 주었다. 성삼경과 조용대(1994)는 한국 증권시장의 자료를 사용하여 블랫버그와 고네디스의 t-분포와 혼합 정규분포를 비교한 결과 혼합 정규분포모형이 우월한 適合性을 갖고 있음을 보여 준 바 있다.

본 논문에서는 한국 증권시장의 자료를 사용하여 주식수익률에 대한 통계적 모형으로서의 혼합 확산도약과정모형에 대한 적합성 검정을 실시하고 그 설명력이 높음을 보여 주고자 하는데 그 목적이 있다.

본 논문 Ⅱ에서는 표본과 연구방법에 대한 설명이 있고 Ⅲ에서는 혼합 확산도약과정의 특성을 고찰하며 Ⅳ에서는 혼합 확산도약과정의 모수추정방법 및 실증분석결과를 보이고 Ⅴ에서는 혼합 확산도약과정모형에 대한 적합도 검정을 보인다. 마지막으로 Ⅵ의 결론에서는 본 논문의 연구결과와 의의에 대해서 언급한다.

Ⅱ. 標本과 硏究方法

일반적으로 주별자료가 일별자료나 월별자료에 비하여 선호된다. 그 이유는 일별자료에 나타날 수 있는 자기상관을 피할 수가 있으며, 즉 일별자료간에 나타날 수 있는 자료의 정보효과가 없어지므로 일별자료들 사이에 독립성을 확보할 수 있기 때문이다.

또한 일별자료는 주별자료에 비하여 상대적으로 유의적인 측정오차(measurement errors)가 발생하기 때문이다. 이러한 특성은 주식가격에 있어서 의사적인 도약(fake jumps)을 야기시켜서 무작위적 과정(random process)에서 나타나는 점프의 존재를 밝히는데 있어서 편의(bias)를 나타낸다. 한편, 월별자료의 사용은 도약(jumps)과 확산(diffusion)에 의해 나타나는 가격의 소폭의 변화(local changes)를 구분하기 어렵게 하고 비효율적인(inefficient) 모수추정치를 찾게 하거나 최적화 알고리즘에 있어서 수치적인 부정확성(numerical inaccuracy)을 초래할 수 있다. 이 때 나타나는 편의(bias)는 도약 요인이 존재할 수 있다는 것을 기각하는 방향으로 나타난다. 로젠펠드(Rosenfeld)의 시뮬레이션 결과가 이러한 내용을 지지하는 것으로 알려져 있으며, 그는 또한 편의나 모수추정의 평균자승오차(mean square error)를

최소로 하는 어떤 추정 간격이 있다는 것을 암시했다. 따라서 수치적인 추정의 정확성을 위해서는 주별자료가 일별자료나 월별자료에 비하여 상대적으로 선호된다(Rosenfeld, 1980).

본 연구에서 사용된 표본은 한국 증권시장에 상장된 주식 중 비교적 수익률이 골고루 퍼져 있는 기업들 중에서 20개 기업과 종합주가지수를 임의적으로 선정하였다. 앞에서 언급한 이유에 의해서 본 연구에서도 주별수익률자료를 사용하였으며, 미국의 기존연구와 비교하기 위하여 최근의 자료 중에서 1982년 12월 22일부터 1988년 9월 21일까지의 300週 동안의 자료와 1988년 9월 28일부터 1994년 6월 29일까지의 300週 동안의 자료로 구분된 표본을 사용하였다. 여기서 주별수익률의 계산은 수요일 종가와 직전 수요일 종가에 의해 구했으며, 그 사이에 거래일이 몇 일인지의 여부에 관계없이 수요일에서 수요일까지를 한 주로 인정하였으며 수요일이 비거래일인 경우는 그 이전의 가장 마지막 거래일자료를 이용하였다.

다음의 〈표 1〉 및 〈표 2〉와 〈그림 1〉 및 〈그림 2〉에서 표본자료의 요약통계와 정규분포와의 비교를 살펴 볼 수 있다.

〈표 1〉 株式種目別 正規分布로부터의 離脫程度 (1982. 12. 22. ~1988. 9. 21)

주식종목(코드)	평 균	표준편차	왜 도	첨 도
종합주가지수(99901)	0.006665	0.051436	0.740206**	1.848832**
충남방적(2655)	0.005826	0.052502	0.446756**	0.765390**
고려합섬(2851)	0.006448	0.042143	0.431078**	0.994160**
럭키(3900)	0.005612	0.044086	0.726016**	2.543040**
서통(4803)	0.007682	0.043681	0.450539**	2.310614**
쌍용양회(5052)	0.007539	0.052915	0.839277**	1.902556**
대우중공업(5900)	0.006897	0.043554	0.308768**	1.049029**
금성사(6401)	0.006409	0.041032	0.476840**	0.981108**
삼성전자(6405)	0.009965	0.063953	0.716799**	1.437483**
오리온전기(6455)	0.007986	0.051014	0.525669**	2.299392**
기아자동차(6750)	0.006947	0.049123	0.697469**	1.578390**
현대자동차(6751)	0.006172	0.057463	0.337306**	1.193014**
쌍용자동차(6752)	0.005267	0.062479	0.657102**	1.694805**
동아건설(7503)	0.005827	0.056373	0.930862**	2.055724**
대림산업(7506)	0.004742	0.062765	0.561181**	0.813423**
동부건설(7542)	0.006325	0.057378	0.725150**	1.858489**
쌍용(7808)	0.006053	0.053659	1.263814**	4.354761**
선경(7823)	0.008577	0.051003	0.482804**	1.302694**
대한항공(8380)	0.005333	0.045257	1.087443**	2.005003**
상업은행(8550)	0.005473	0.047557	1.032468**	2.176131**
한일은행(8553)	0.005551	0.024950	0.102427*	0.191601*

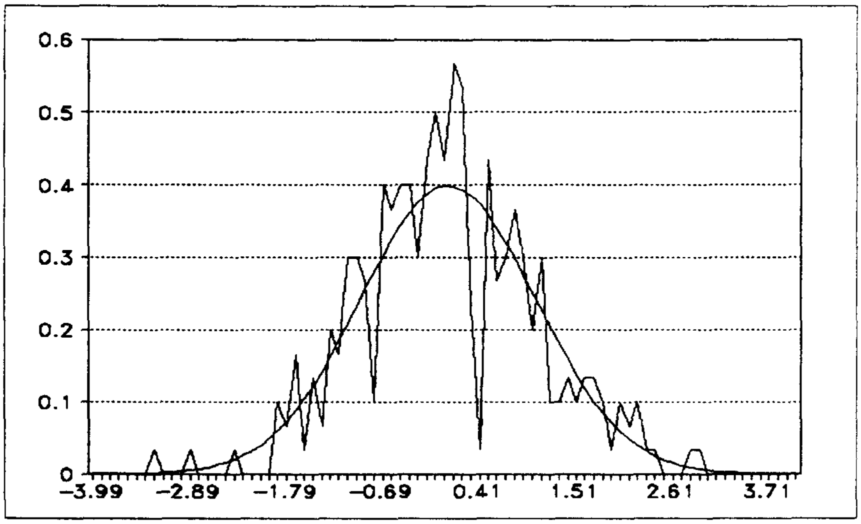
1%의 오차수준에서 유의한 값: **
5%의 오차수준에서 유의한 값: *
standard error of skewness: 0.042
standard error of kurtosis: 0.084.

〈표 2〉 株式種目別 正規分布로부터의 離脫程度(1988. 9. 28. ~1994. 6. 29)

주 식 종 목(코 드)	평 균	표 준 편 차	왜 도	첨 도
종 합 주 가 지 수(99901)	0.001073	0.033486	0.611689**	4.390831**
충 남 방 적(2655)	0.002229	0.057630	0.923445**	2.916160**
고 려 합 섬(2851)	0.000162	0.051304	0.650765**	3.465488**
럭 키(3900)	0.001295	0.043508	0.618114**	1.924922**
서 통(4803)	0.001030	0.053869	0.531663**	3.261011**
쌍 용 양 회(5052)	0.002565	0.044211	0.420755**	2.664890**
대 우 중 공 업(5900)	0.001274	0.051179	0.527302**	1.241070**
금 성 사(6401)	0.001874	0.047775	0.600218**	1.469997**
삼 성 전 자(6405)	0.004673	0.040847	0.285083**	0.984959**
오 리 온 전 기(6455)	0.001371	0.044059	0.259342**	0.815341**
기 아 자 동 차(6750)	0.000924	0.044165	0.335226**	1.402266**
현 대 자 동 차(6751)	0.002269	0.050317	0.094588*	1.245717**
쌍 용 자 동 차(6752)	-0.000630	0.049863	0.501413**	2.111037**
동 아 건 설(7503)	0.002441	0.049851	0.408977**	2.553673**
대 림 산 업(7506)	-0.000410	0.046585	0.437431**	0.919909**
동 부 건 설(7542)	-0.000190	0.053337	0.281659**	1.839382**
쌍 용(7808)	0.000118	0.043372	0.438365**	1.489473**
선 경(7823)	0.000950	0.050169	0.005538	2.109283**
대 한 항 공(8380)	0.001092	0.046095	0.348474**	2.027717**
상 업 은 행(8550)	-0.000800	0.046250	1.132601**	5.483526**
한 일 은 행(8553)	0.000031	0.047159	1.005668**	5.021355**

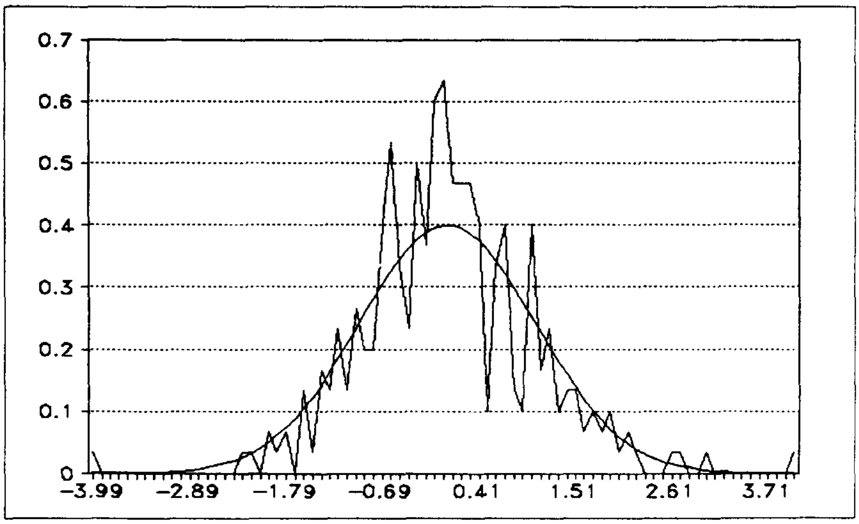
1%의 오차수준에서 유의한 값: **
5%의 오차수준에서 유의한 값: *
standard error of skewness: 0.042
standard error of kurtosis: 0.084.

자료 : 종합주가지수(KOSPI, 1982.12.22~1988.9.21)



〈그림 1〉 정규분포와 실제분포의 비교 I

자료 : 종합주가지수(KOSPI, 1988.9.28~1994.6.29)



〈그림 2〉 정규분포와 실제분포의 비교 II

Ⅲ. 혼합 확산도약과정의 특성

주식가격을 생성시키는 확률과정은 확산과정(diffusion process)과 혼합도약과정(compound jump process)이 겹쳐서 이루어져 있다고 볼 수 있다. 이러한 유형의 가장 일반적인 독립적 증분과정(independent-increment process)은 확산과정을 브라운운동(Brownian motion)으로 상정하고 도약과정을 포아송과정(Poisson process)으로 상정함으로써 설명이 가능하다.

혼합 포아송과정은 시간과 상태(time and state)에 대해 동질적(homogeneous)이며, 브라운운동과는 독립적이다. S(t)가 시점 t에서의 주가를 나타낸다고 할 때, 확률과정과 도약과정의 혼합과정은 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.[1)]

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \alpha dt + \sigma dB(t) + J_t dN(t) \quad \cdots\cdots (1)$$

단, $B(t)$ = 표준 브라운운동(*standard Brownian motion*)

$N(t)$ = 독립적인 포아송분포(*independent Poisson process*)

포아송분포 ($N(t)$)의 강도를 나타내는 모수(intensity parameter)인 λ는 '0'보다 크며, $dN(t)$는 다음과 같다.

$$dN(t) = \begin{cases} 0 & w.p. \quad 1 - \lambda dt + 0(dt) \\ 1 & w.p. \quad \lambda dt + 0(dt) \\ n & w.p. \quad 0(dt), \quad \text{for } n = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

여기서 λdt는 가격이 짧은 기간 ($[t, t+dt]$)사이에서 도약할 확률을 의미한다. 또한 J_t는 t시점에서의 포아송도약의 크기('1+가격의 퍼센트변화'에 로그를 취한 값)를 측정하는 확률변수이며 $N(t)$와는 독립적이다. α는 주가의 브라운운동에 해당되는 단위시간에 대한 순간조건부 기대수익률(instantaneous conditional expected rate of return)이며, σ는 이와 같은 수익

1) 혼합확산도약과정의 특성은 악기레이와 부쓰(Akgiray, V., and Booth, G.G., 1986)의 논문 "Stock Price Processes with Discontinuous Time Paths: An Empirical Examination."을 참고 하였다.

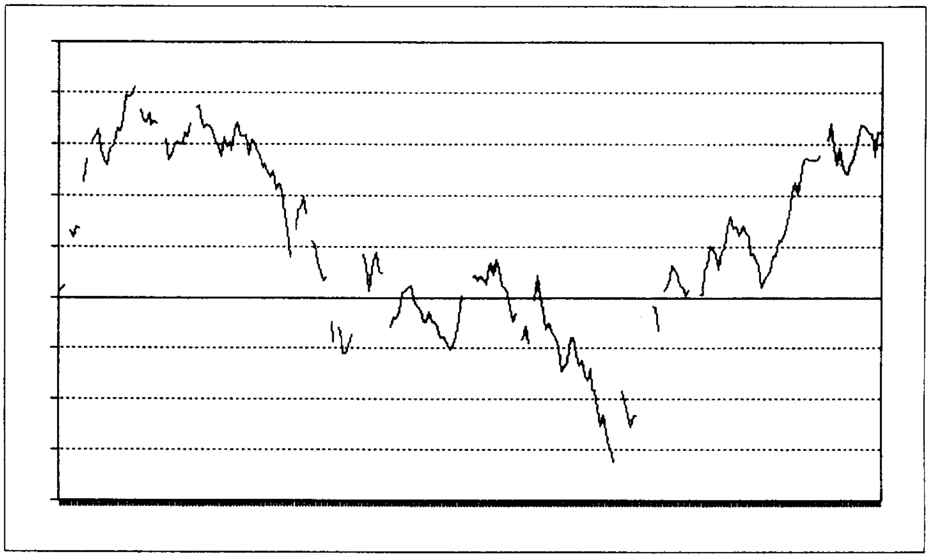
률의 순간조건부 표준편차(instantaneous conditional standard deviation)이다(단, $\sigma>0$). 위의 (1)식은 각 표본 경로에 따라 이토의 공식(Ito's formula)을 이용하여 풀면 다음과 같은 식으로 표현이 가능하다.

$$\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)=\mu t+\sigma B(t)+\sum_{n=1}^{N(t)} J_{t_n} \quad \cdots\cdots (2)$$

여기서 $\mu=\sigma-\frac{1}{2}\sigma^2$이고, $X(t)\equiv\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)$는 기간 [0, t] 사이의 연속적인 수익률을 나타내는 확률변수이며, 이것은 다음과 같은 두 개의 독립적인 확률변수의 합이다. 첫째는 $X_1(t)\equiv\mu t+\sigma B(t)$으로서 연속적으로 변화하는 브라운운동부분이며, 둘째는 $X_2(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} J_{t_n}$으로서 시간 t까지 불연속적 변화들(Poisson jumps)의 누적적인 크기를 나타내는 부분이다. $X(t)$의 확률분포함수는 $X_1(t)$와 $X_2(t)$의 合成積(convolution)으로 얻어진다.

다음의 〈그림 3〉은 우리나라 종합주가지수의 혼합 확산도약과정을 보여 주고 있으며, 〈그림 4〉와 〈그림 5〉는 각각 확산과정과 도약과정을 나타내 주고 있다.

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t)$$



자료 : 종합주가지수(KOSPI, 1988.9.28~1994.6.29)

$$\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \mu t + \sigma B(t) + \sum_{n=1}^{N(t)} J_{t_n}$$

단, $X(t) = \log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)$

$$\mu = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$$

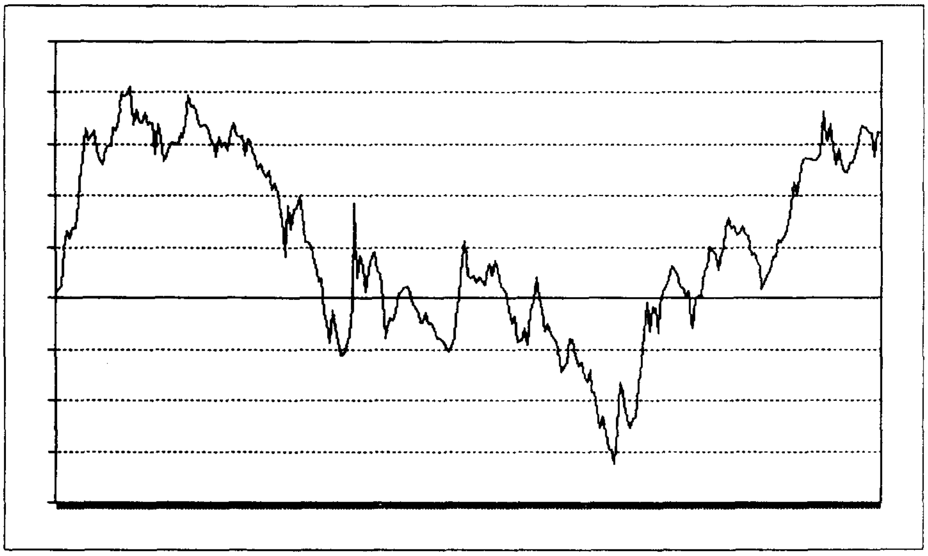
$$X_1(t) = \mu t + \sigma B(t)$$

$$X_2(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} J_{t_n}$$

〈그림 3〉 혼합과정(mixed process)

$$X_1(t) = \mu t + \sigma B(t)$$

단, $X_1(t)$ = 연속적으로 변화하는 브라운운동(*Brownian Motion*) 부분

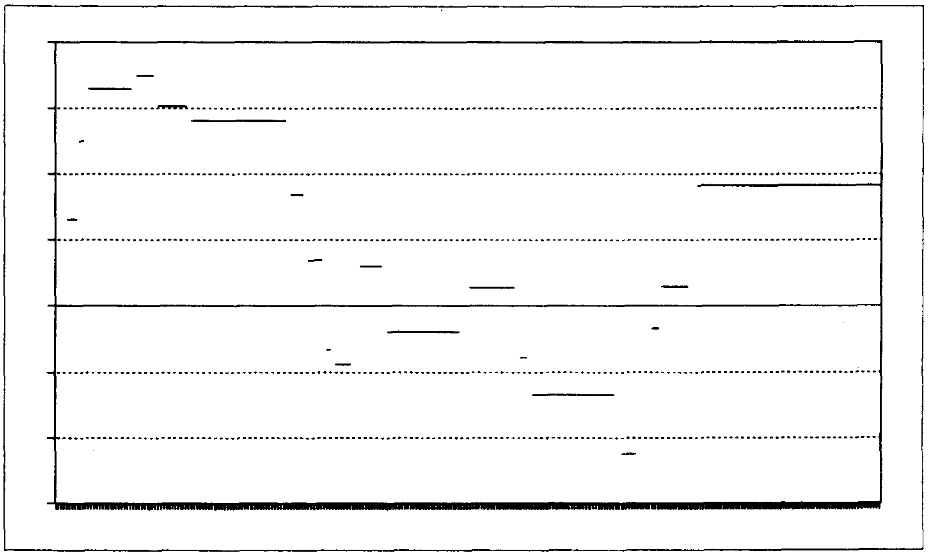


자료 : 종합주가지수(KOSPI, 1988.9.28~1994.6.29)

〈그림 4〉 확산과정(diffusion process)

$$X_2(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} J_{t_n}$$

단, $X_2(t)$ = 시간 t 까지 포아송분포를 따르는 불연속적 변화들(*Poisson jumps*)의 누적적인 크기



자료 : 종합주가지수(KOSPI, 1988.9.28~1994.6.29)

〈그림 5〉 도약과정(jump process)

기존의 연구들과 비교하기 위하여 도약의 크기(jump size)는 평균이 μ_J이고 분산이 σ_J^2인 정규분포를 따르는 것으로 가정할 때, $X(0)=0$인 것을 조건으로 하는 $X(t)$의 확률분포함수는 이미 잘 알려진 브라운운동의 $X_1(t)$와 포아송과정인 $X_2(t)$의 합성적에 의해 다음과 같다.

$$F(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{n!}(\lambda t)^n \Omega(X\,;\mu t+n\mu_J,\ \sigma^2 t+n\sigma_J^2) \quad \cdots\cdots (3)$$

단, $\Omega(\cdot)$=정규분포함수

$$\mu=\sigma-\frac{1}{2}\sigma^2$$

이 때 위의 (3)식을 미분하면 다음과 같은 $X(t)$의 확률밀도함수를 구할 수 있다.

$$f(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{n!}(\lambda t)^n \omega(X\,;\mu t+n\mu_J,\ \sigma^2 t+n\sigma_J^2) \quad \cdots\cdots (4)$$

단, $\omega(\cdot)$=정규밀도함수

또한 $X_1(t)$와 $X_2(t)$의 특성함수의 곱에 의해 구해지는 $X(t)$의 특성함수는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
C_t(\theta) &\equiv E(e^{i\theta X(t)}) \\
&= \exp\Big[t\theta\Big(i\mu - \frac{1}{2}\theta\sigma^2\Big) \\
&\quad + t\lambda\Big(\exp\Big\{i\theta\mu_J - \frac{1}{2}\theta^2\sigma_J^2\Big\} - 1\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

이 때 S>0, r>0 이면, $C_{r+s}(\theta) = C_r(\theta)C_s(\theta)$이다. 따라서 $X(t)$는 무한히 나눌 수 있는 분포(infinitely divisible distribution)를 갖는다. 이러한 결과는 또한 위의 과정이 안정적(stationary)이고 독립적인 증분(increment)을 갖는다는 사실로부터 나온다. 한편, $X(t)$의 적률들(moments)은 $C_t(\theta)$에 대해서 미분을 반복함으로써 얻을 수 있다. $m=E(X)$라 하고 $m_i=E(X-m)^i$는 평균중심의 i번째 적률이라고 할 때, $\mu_J \gtrless 0$에 대해 $m_3/(m_2)^{\frac{3}{2}} \gtrless 0$이라는 것을 알 수 있다. 다시말해 μ_J와 $m_3/(m_2)^{\frac{3}{2}}$는 같은 방향의 부등호를 가진다. 그러므로 $\mu_J \neq 0$ 이라면 이들 분포는 '0'이 아닌 왜도를 갖는다. 즉, 분포가 비대칭적이다. 또한 이들 분포는 λ>0일 때 첨도가 3보다 크므로, $\left(\frac{m_4}{(m_2)^2} > 3\right)$, 중심부분과 양쪽 꼬리 부분의 밀도가 높아 실제 주식수익률분포의 모습을 잘 나타내어 줄 수 있다.

Ⅳ. 혼합 확산도약 과정의 모수추정 (Mixed Diffusion-Jump Process)

4.1 혼합 확산도약과정모형의 모수추정 방법론

일반적으로 추정방법에는 적률법(method of moments), 베이지안법(Bayesian method), 최소자승법(least squares Method), 최대우도추정법(maximum likelihood method) 등이 있으나 본 논문에서와 같이 모집단의 분포를 알고 있다고 전제할 경우에는 최대우도추정법(maximum likelihood method)이 이용된다.

우도함수는 주변확률분포를 이용하여 만들어진 결합확률분포로서 우도함수인 결합확률분포

의 값이 가장 클 때의 모수를 추정하는 방법이다. 이 때의 추정량을 最大尤度推定量(maximum likelihood estimator: MLE)이라고 한다. 위의 우도함수를 극대화하는 모수추정량은, 주어진 우도함수에 로그를 취한 로그우도함수를 극대화하여서 구한 최대우도추정량과 동일하기 때문에 로그우도함수를 이용하여 최대우도추정치를 구할 수 있다.

혼합 확산도약과정모형에서의 확률밀도함수(p. d. f.)는 다음과 같다.

$$f(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{n!}(\lambda t)^n\,\omega(X\,;\mu t+n\mu_J,\ \sigma^2 t+n\sigma_J^2) \quad\cdots\cdots(5)$$

여기서 $\omega(\cdot)$는 정규분포의 확률밀도함수이다. 혼합 확산도약과정모형의 우도함수(likelihood function)는 다음과 같다.

$$L(X;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(X_i\,;\theta) \quad\cdots\cdots(6)$$

이다. 위와 같은 우도함수의 최대우도추정량(θ)은 우도함수에 로그를 취하였을 때의 극대값과 동일한 결과의 추정량이 된다. 이 때의 로그우도함수는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\log L(X,\ \theta)=\sum_{i=1}^{N}\log f(X_i) \quad\cdots\cdots(7)$$

여기서 $\theta=\mu,\ \sigma^2,\ \lambda,\ \mu_J,\ \sigma_J^2)$이다.

실제적 계산을 위해서 $\log f(X_i)$와 $-\log L(X,\ \theta)$를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다. 앞의 (5)식으로부터

$$\log f(X_i)=-\lambda-\frac{1}{2}\log(2\pi)+\log(S_i)$$

이다. 이때

$$S_i=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!\sqrt{\sigma^2+n\sigma_j^2}}\cdot\exp\left[-\frac{X_i-\mu-n\mu_j)^2}{2(\sigma^2+n\sigma_j^2)}\right]$$

이다.

(7)식으로부터

$$-\log L(X,\ \theta)=N\lambda+\frac{N}{2}\log(2\pi)-\sum_{i=1}^{N}\log(S_i)$$

이고, 이를 θ에 대해서 최소화함으로써 θ의 MLE를 구한다. 이 때 S_t는 무한합으로 표현되어 있으나, 실제로는 무한합을 계산할 수 없으므로 n=15일 때까지의 합으로써 S_t를 근사 계산하였다. 실제로 MLE를 구하는 데는 Quasi-Newton 최적화기법을 적용한 IMSL의 DBCONF 서브루틴을 이용하였다.

4.2 혼합 확산도약과정모형의 모수추정 결과

한국 증권시장의 자료를 이용하여 구한 5개 모수(μ와 σ^2는 확산과정 부문의 평균과 분산이고 λ는 포아송분포의 모수이며 μ_J와 σ_J^2는 도약의 크기의 평균과 분산)의 최대우도추정량의 표본기간의 전기의 값은 〈표 3〉에서, 후기의 값은 〈표 4〉에서 볼 수 있다.

주별수익률의 평균과 분산은 $E(X)=\hat{\mu}+\hat{\lambda}\hat{\mu}_J$와 $Var(X)=\hat{\sigma}^2+\hat{\lambda}(\hat{\sigma}_J^2+\hat{\mu}_J^2)$로서 계산할 수 있다. 〈표 3〉에서 20개 주식의 평균수익률이 모두 양수값이며 〈표 4〉에서는 20개 주식 중 쌍용자동차, 대림산업, 동부건설, 상업은행의 4개의 평균수익률이 음수일뿐 모두 양수이다. 종합주가지수의 평균수익률은 전 · 후기 모두 양수이어서 현실적 추정치들 임을 입증하기도 한다.

추정량 $\hat{\lambda}$의 경우 미국의 200개 주식의 추정치 중 하나만이 3을 넘고 모두 1.5이하인 값을 갖는 데 비해(Akgiray and Booth, 1986) 우리나라의 경우는 42개의 추정치 중 13개의 값이 3을 넘는다. 일주에 미국은 5일 시장인데 비해 우리는 6일 시장이긴 하지만 우리나라 시장이 상대적으로 규모가 작아 가격이 더욱 도약적인지도 모른다.

〈표 3〉 혼합 확산도약과정모형의 母數에 對한 最大尤度推定値(1982. 12. 22～1988. 9. 21)

주 식 종 목 (코드)	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\mu}_J$	$\hat{\sigma}_J$	χ^2 1)	D_N 2)
종합주가지수(99901)	0.02157	0.51470	0.28818205	19.18707	0.00010	0.681945	0.04382
충남방적(26550)	8.15569	0.00010	3.99874729	-0.37279	0.62167	15.121600	0.05274
고려합섬(28510)	-13.96122	0.59826	1.16283097	17.01667	1.63267	20.642490	0.04845
럭키(39000)	6.47464	0.00010	3.94624168	-0.00679	0.43479	10.140590	0.06253
서통(48030)	-3.18420	0.55114	0.58061516	15.15005	2.15060	44.159320	0.06009
쌍용양회(50520)	8.08305	0.00010	3.54152800	-0.11337	0.50724	27.373500	0.05666
대우중공업(59000)	-6.99323	0.56496	0.72489526	20.04791	2.74674	47.624400	0.04857
금성사(64010)	10.00855	0.00010	3.65088469	-0.85221	0.51364	14.138650	0.05012
삼성전자(64050)	8.75732	0.00010	4.19788165	-0.55934	0.39496	1.798826	0.06464
오리온전기(64550)	-8.14061	2.15870	0.17458726	103.70276	0.00010	26.696150	0.03700
기아자동차(67500)	6.81392	0.00028	3.59517002	0.32650	0.68583	23.407050	0.05754
현대자동차(67510)	-2.69548	1.45392	0.09657771	99.84616	0.00010	26.978340	0.03091
쌍용자동차(67520)	-8.07393	0.63769	1.23818536	11.50548	2.05210	20.048610	0.04214
동아건설(75030)	-10.08572	0.97153	0.70194248	21.87155	3.75835	39.413300	0.03288
대림산업(75060)	-18.21570	0.26213	1.44379805	16.65262	1.64580	51.212530	0.04388
동부건설(75420)	-10.59417	1.40477	0.78055045	19.64817	2.90514	18.679990	0.05480
쌍용(78080)	-9.71916	0.43399	1.18901518	13.49329	2.16316	40.573260	0.05121
선경(78230)	5.60116	0.00010	3.61748927	0.12488	0.71118	35.232370	0.06253
대한항공(83800)	-4.72250	0.68468	0.85427239	15.56850	2.03259	27.189410	0.03405
상업은행(85500)	5.78010	0.00055	3.26260787	-0.13733	0.57147	34.316920	0.10108
한일은행(85530)	5.18127	0.00010	3.88754099	0.07495	0.51774	25.428320	0.07370

단, 1) : 통계량 χ^2의 임계치는 유의수준 0.75, 0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.01에 대하여 각각 1.213, 2.366, 4.108, 6.251, 7.815, 11.345이다.

2) : 통계량 D^N의 임계치는 유의수준 0.2, 0.1, 0.05, 0.01에 대하여 각각 0.0618, 0.0704, 0.0785, 0.0941이다.

그리고 $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{\mu}_J$와 $\hat{\sigma}_J$는 10^{-3}의 단위로 표시하였다.

〈표 4〉 혼합 확산도약과정모형의 母數에 對한 最大尤度推定値(1988. 9. 28~1994. 6. 29)

주식종목 (코드)	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\mu}_J$	$\hat{\sigma}_J$	χ^2[1)]	D_N[2)]
종합주가지수(99901)	0.13315	0.00010	3.82726398	0.24566	0.27652	19.467970	0.03751
충남방적(26550)	-10.41377	1.18071	0.36020913	35.09813	4.73358	53.961600	0.05834
고려합섬(28510)	- 0.00447	0.00010	2.41990444	0.06884	1.05458	116.287900	0.09063
럭키(39000)	- 3.91336	1.32010	0.04632426	112.44235	0.00010	24.396140	0.05603
서통(48030)	- 0.00060	0.00010	2.70658754	0.38085	1.00057	87.875500	0.08209
쌍용양회(50520)	- 0.00106	0.00010	2.78175531	0.92245	0.66473	72.387990	0.08221
대우중공업(59000)	- 7.03862	1.78149	0.08273288	100.47390	0.00010	16.474500	0.03830
금성사(64010)	- 2.27981	1.74448	0.03162215	131.35124	0.00010	19.580970	0.06031
삼성전자(64050)	2.83564	0.00010	3.52363406	0.52155	0.46160	20.658140	0.06725
오리온전기(64550)	- 4.73756	0.08691	2.46744807	2.47569	0.75337	10.340140	0.05551
기아자동차(67500)	- 4.63001	0.91256	0.43056663	12.89819	2.27224	19.060340	0.05807
현대자동차(67510)	0.54775	0.86606	0.60969513	2.82286	2.78283	21.384000	0.05339
쌍용자동차(67520)	- 0.00105	0.00010	2.83137065	-0.22047	0.83286	70.506740	0.07865
동아건설(75030)	- 4.57978	1.00413	0.40761238	17.22372	3.32983	33.195060	0.03804
대림산업(75060)	- 0.00202	0.00010	3.10968418	-0.13020	0.68761	41.757260	0.07687
동부건설(75420)	- 0.00041	0.00010	2.78450103	-0.06848	0.99181	72.846050	0.06398
쌍용(78080)	- 0.00119	0.00010	2.97856823	0.04003	0.63022	47.205290	0.07091
선경(78230)	- 0.00094	0.00010	2.83672132	0.33524	0.82405	73.869960	0.09489
대한항공(83800)	- 5.64690	0.77459	0.45978142	14.65687	2.76401	33.805860	0.03820
상업은행(85500)	- 0.00662	0.00010	3.13094949	-0.25405	0.63911	51.335260	0.09759
한일은행(85530)	- 0.00071	0.00010	2.66569534	0.01192	0.77607	89 432030	0.11249

단, 1) : 통계량 χ^2의 임계치는 유의수준 0.75, 0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.01에 대하여 각각 1.213, 2.366, 4.108, 6.251, 7.815, 11.345이다.

2) : 통계량 D^N의 임계치는 유의수준 0.2, 0.1, 0.05, 0.01에 대하여 각각 0.0618, 0.0704, 0.0785, 0.0941이다.

그리고 $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{\mu}_J$와 $\hat{\sigma}_J$는 10^{-3}의 단위로 표시하였다.

V. 適合度 檢定

확산과정에 더하여 도약과정의 존재를 확인하기 위하여 다음과 같은 χ^2검정통계량을 이용한 우도비율검정을 실시할 수 있다.

$$\chi^2 = -2[\log L(X, \theta_r) - \log L(X, \theta)] \cdots\cdots (8)$$

단, $\theta_r = (\mu, \sigma^2, 0, 0, 0)$

$L(X, \theta_r)$ = 확산과정의 우도함수 값

여기서 $\lambda=0$이면 μ_J와 σ_J도 당연히 '0'이 되고, 이 경우 $f(X_i)$는 $N(\mu, \sigma^2)$의 확률밀도함수가 된다. 따라서 $\hat{\mu}_{MLE}=\bar{X}$이며, $\hat{\sigma}^2_{MLE}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})^2$이 되어

$$-2\log L(X, \theta_r) = N + N\log(2\pi) + N\log(\hat{\sigma}^2_{MLE})$$

로 계산된다.

한편 통계량 χ^2는 $X(t)=X_1(t)$라는 귀무가설하에서 점근적으로 자유도 3인 χ^2분포를 이룬다. 검정의 결과는 〈표 3〉에서 유의수준 0.05로 종합주가지수와 삼성전자만이 기각이 안되고 19개의 수익률이 기각되며, 비교적 활발한 장세였던 후기 표본기간의 〈표 4〉에서는 21개 값이 모두 기각된다. 따라서 한국 증권시장에서 주식수익률의 형성과정에 도약과정이 존재한다고 말할 수 있다.

한편 총체적 모형의 적합도를 살펴보기 위하여 다음 식을 사용하는 콜모고로프-스미르노프(Kolmogorov-Smirnov) 검정을 실시하였다. 즉, 혼합 확산도약과정이 실제분포를 얼마나 잘 설명해 주고 있는 지를 살펴보았다.

$$D_N = \max\left\{\max\left\{\frac{i}{N} - F(X_i)\right\}, \max\left\{F(X_i) - \frac{i-1}{N}\right\}\right\} \cdots\cdots (9)$$

단, i = 1, 2, · · · , N

N = 표본의 크기

F(x) = 가설로 제시된 분포함수

D_N의 실제적 계산을 위해서는, X(t)의 분포함수식인 (3)식을 적용한 IMSL의 DKSONE 서브루틴을 이용하여 D_N을 구했다.

콜모고로프-스미르노프 검정 결과 또한 앞의 〈표 3〉과 〈표 4〉에 잘 나타나 있다. 각각의 표에서 D_N통계량이 작을수록 혼합 확산도약과정 분포가 실제분포에 적합함을 나타낸다. 우선 〈표 3〉에서 보면 귀무가설인 혼합도약과정이 유의수준 0.01에서 기각되는 경우가 상업은행 하나일뿐 나머지 20개 주식 모두는 유의수준 0.05에서도 귀무가설인 혼합도약과정이 기각되지 않는다. 또한 〈표 4〉를 보면 유의수준 0.05에서 7개의 주식이 기각되고 나머지 14개의 표본들은 기각되지 않으나 유의수준 0.01에서는 오직 3개의 주식만이 귀무가설을 기각하고 있다. 미국의 경우는 0.2의 유의수준에서 혼합 확산도약과정을 따른다는 귀무가설을 200개의 주식 중 3개의 주식만이 기각한다. 미국의 경우보다는 상대적으로 약하지만 결국 대부분의 경우 한국 증권시장에서도 주식수익률의 실제분포가 혼합 확산도약과정을 따른다는 귀무가설을 크게 기각 못하고 있다고 말할 수 있다.

Ⅵ. 結　論

증권수익률의 생성과정에 대한 최근의 이론인 혼합 확산도약과정의 가설은 이론적인 측면에서 볼 때나 실증적인 측면에서나 설득력이 상당히 크다고 할 수 있다. 우리나라 증권시장의 경우 χ^2검정통계량을 이용한 우도비율검정에서 확산과정에 더하여 도약과정이 존재함을 42개의 표본 중 유의수준 0.05에서 40개의 표본이 지지하는 것으로 나타났다.

혼합 확산도약과정이 실제자료의 분포와 적합의 정도를 알아 보기 위하여 실시한 콜모고로프-스미르노프 검정의 결과는 42개의 표본 중 유의수준 0.01에서 한일은행을 제외한 41개의 표본이 부합하는 것으로 나타났고 유의수준 0.05에서는 8개를 제외한 34개의 표본이 실제분포와 다름이 없음을 나타내고 있다. 이러한 발견은 한국에서도 블랙-숄즈(Black-Scholes)의 옵션가격결정모형이나 연속적 자산가격결정의 모형처럼 확산과정의 가정에 기초한 이론적 모형들은 일반적으로 성립되지 않음을 보여 주는 것이다.

지금까지 한국의 경우는 김선웅(1988), 이필상과 안동현(1991), 성삼경과 조용대(1994)의 연구에서 혼합 정규분포모형의 우월성을 논하고 있으나 본 논문에서는 혼합 확산도약과정모형의 우월성도 만만치 않음을 검증하여 보였다. 따라서 앞으로 혼합 정규분포모형과 혼합 확산도약과정모형의 비교연구가 있어야 할 것이며, 아니면 동일한 표본자료를 갖고 혼합 확산도약과정, 혼합 정규분포, t-분포(scaled t distribution)와 일반 안정분포(general stable distribution)간의 상호비교를 실시함으로써 지금까지의 연구의 총체적 마무리를 맺을 수도 있겠다.

참 고 문 헌

1. 곽병관, "한국증권시장의 효율성에 관한 연구: 한국 종합주가지수 산정 종목을 중심으로한 실증적 검증", 서울대학교 대학원, 석사학위 논문, 1978.
2. 김대훈, "우리나라 주식의 일일수익률 분포에 관한 실증적 연구", 한국과학기술원, 석사학위논문, 1988.
3. 김선웅, "주식시장가격의 비정상적 행태에 관한 연구 - 국제적 비교와 의의", 한국과학기술원, 박사학위논문, 1988.
4. 김희택, "한국증권시장의 Week Form Efficiency에 관한 연구", 서울대 학교 대학원, 석사학위 논문, 1981.
5. 박춘호, "효율적 시장가설의 검증결과에 대한 비교연구-한국, 미국, 일본의 검증결과를 중심으로." 고려대학교 대학원 석사학위 논문, 1985.
6. 성삼경, 박주범, "한국증권 수익률의 요일효과", 경영연구, 제21권 제2호, 1987.
7. 성삼경, 안진철, "한국주식가격 변동의 안정 파레티안분포 가설의 검정", 경영학연구, 제15권 제2호, 1986. 2.
8. 성삼경, 조용대, "한국증권 일별수익률분포모형의 연구', 경영연구, 제27권 제2호, 1993.
9. 심병구, 안 림, 유득용, 윤계섭, "효율적 증권시장가설이론과 한국증권시장에 있어서의 검증", 증권학회지, 제1집, 1980.

10. 윤계섭, "우리나라 증권시장에 있어서 효율적 증권시장 가설의 Week Form Efficiency에 관한 검증", 증권학회지, 제2집, 1981.

11. 이필상, 안동현, "우리나라 증권시장에서의 이산적 혼합 정규분포모형의 검증." 경영논총 제35집, 1991.

12. 조 담, "우리나라 증권시장의 주가변동에 관한 연구-평균,분산기준의 재검토를 위하여." 홍대 논총, Vol. 11, 1979.

13. 지 청, "현대 포트폴리오 이론과 CAPM의 실증적 연구." 증권학회지, 제3집, 1982.

14. Aharony,Joseph and Swary, Itzhak. "Quarterly Dividend and Earnings Announcements and Stockholders' Returns: An Empirical Analysis." Journal of Finance, Vol. 35 (March 1980), pp. 1-12.

15. Akgiray, V., and Booth, G.G. "Stock Price Processes with Discontinuous Time Paths: An Empirical Examination." The Financial Review, Vol. 21, 1986, pp. 163-184.

16. ______, "The Stable-Law Model of Stock Returns." Journal of Business and Economic Statistics, V. 6, No. 1, Jan., 1988, pp. 51-57.

17. Akgiray, V., Booth, G.G., and Loistl, O. "Statistical Models of German Stock Returns." Journal of Economics,V. 50, No. 1, Mar. , 1989, pp. 17-33.

18. Ball, Clifford and Torous. "A Simplied Jump Process for Common Stocks Returns." Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 18 (March 1983), pp. 1-12

19. Beaver, William. "The Information Content of Annual Earnings Announcement." Empirical Research in Accounting: Selected Studies, Supplement to Journal of Accounting Research, Vol. 6 (1968), pp. 67-92.

20. Blattberg, Robert and Gonedes, Nicholas. "A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices." Journal of Business, Vol. 47(April 1974), pp. 244-80.

21. Boness, A.J., Chen, A., and Jatusipitak, S., "Investigation of Nonstationarity in Prices." Journal of Business, Vol. 47, Oct., 1974, pp. 518-537.

22. Charest, Guy. "Dividend Information, Stock Returns, and Market Efficiency." Journal of Financial Economics, Vol. 6 (June /September 1978), pp. 297-330.

23. Christie, Andrew. "The Stochastic Behavior of Common Stock Variance: Value, Leverage, and Interest Rate Effects." Journal of Financial Economics, Vol. 10 (December 1982), pp. 407-32

24. Clark, Peter. "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices." Econometrica, Vol. 41 (January 1973), pp. 135-55.

25. Cornew, R.W., Town, D.E., and Crowson, L.D., "Stable Distributions, Futures Prices, and the Measure of Trading Performance." The Journal of Futures Markets, Vol. 4, No. 4, 1984, pp. 531-557.

26. Dusak Katherine, "Future Trading and Investors Return:An Investigation of Commodity Market Risk Premium." Journal of the Political Economy, Vol. 81, (December 1981), pp. 1387-1406.

27. Fama, Eugene F. "Mandelbrot and Stable Paretian Hypothesis." Journal of Business, Vol., No. 4 (October 1963), pp. 420-429.

28. ——, "The Behavior of Stock Prices." Journal of Business, Vol. 47 (January 1965), pp. 244-80.

29. French, Kenneth. "Stock Returns and the Weekend Effect." Journal of Financial Economics, Vol. 8 (March 1980), pp. 55-70.

30. Gibbons, Michael and Hess, Patrick. "Day of the Week Effects and Asset Returns." Journal of Business, Vol. 54 (October 1981), pp. 579-96.

31. Goldfeld, Stephen and Quandt, Richard. Nonlinear Method in Econometrics. Amsterdam: North-Holland, 1972.

32. Hagerman, Robert. "More Evidence on the Distribution of Security Returns." Journal of Finalce, Vol. 33 (September 1978), pp. 1213-20.

33. Hsu Der-Ann, Miller, R.B., and Wichern, D.W., "On the Stable Paretian Behavior of Stock Market Prices." Journal of American Statistical Association, Vol. 69, No.

345, Mar., 1974, pp. 108-113.

34. Keim, D.B., "Size Related Anomalies and Stock Return Seasonality". Journal of Financial Economics, Vol. 12 (June 1983), pp. 13-32.

35. Kendall, M.G. "The Analysis of Economic Time Series." Journal of the Royal Statistical Society, (Series A), XCVI (1953), pp. 11-25.

36. Kiefer, Nicholas. "Discrete Parameter Variation: Efficient Estimation of Switching Regression Model." Econometrica, Vol. 46 (March 1978), 427-34.

37. Kon, Stanly J. "Models of Stock Returns-A Comparison." Journal of Finance, Vol. 39 NO. 1 (March 1984).

38. Mandelbrot, B., "The Variation of Certain Speculative Prices.", Journal of Business, Vol. 36, Oct., 1963, pp. 394-419.

39. McFarland, James W., Pettit, Richardson R. and Sam K. Sung, "The Distribution of Foreign Exchange Price Changes: Trading Day Effects and Risk Measurement." Journal of Finance, Vol. 37. No. 3 (June 1982), pp. 693-715.

40. Officer, Robert. "The Distribution of Stock Returns." Journal of American Statistical Association, Vol. 67 (December 1972), pp. 807-12.

41. Patell, James and Wolfson, Mark. "The Ex Ante and Ex Post Price Effect of Quarterly Earnings Announcements Reflected in Option and Stock Prices." Journal of Accounting Research, Vol. 19 (Autumn 1981), pp. 434-58.

42. Praetz, Peter. "The Distribution of Share Price Changes." Journal of Business 45 (January 1972), pp. 49-55.

43. Press, S. James. "A Compound Events Model of Security Prices." Journal of Business, Vol. 40 (July 1967), pp. 317-35.

44. Roll, Richard, "The Behavior of Interest Rates: An Application of Efficient Market Model to U.S. Treasury Bills." Basic Books Inc. ; New York, 1970.

45. Rosenfeld, E.R., "Stochastic Processes of Common Stock Returns: An Empirical Examination." Ph.D. Thesis, M.I.T., 1980.

46. So, J.C., "The Sub-Gaussian Distribution of Currency Futures: Stable Paretian or Nonstationarity ?" The Review of Economics and Statistics, Feb., 1987. pp. 100-107.

47. Tucker, A.L., and Pond, L., "The Probability Distribution of Foreign Exchange Price Changes: Tests of Candidate Processes" The Review of Economics and Statistics, v. 70, Feb., 1988. pp. 638-647.

48. Westerfield, James. "An Examination of Foreign Exchange Risk under Fixed and Floating Rate Regimes." Journal of International Economics, (1977), pp. 181-200.

On the Hypothesis of Mixed Diffusion-Jump Process for the Korean Common Stock Returns

Sam-Kyung Sung*, Jeong-Soo Park**, Yong-Dae Cho***

ABSTRACT

This study discusses the statistical properties of a mixed diffusion-jump process and conducts the tests of fit for the stochastic process to 20 Korean individual common stocks as well as the Korean stock indices. The maximum likelihood estimates of the process parameters are obtained and Kolmogorov-Smirnov tests for the goodness-of-fit are performed.

The results reveal that the mixed diffusion-jump process model has the significant descriptive power. The implications of these findings are investigated further.

* Korea University
** Chonnam National University
*** Korea University