經營學硏究 第18卷 第1號(1988年 9月)

APT는 CAPM보다 우수한 資産評價模型인가?

-模型의 假定과 形態에 관한 理論的 比較硏究- *

宋 永 出 **

《目 次》

第1章 序 論

第1節 硏究의 動機와 目的

危險下에서의 포오트폴리오選擇(portfolio selection)行動을 설명하는 가장 일반적인 基準은 期待效用의 極大化(maximization of the expected utility)이다.

---

* 이 硏究는 本人의 博士學位論文중의 일부이다.
宋永出, 資産價格決定模型에 관한 硏究 - CAPM과 APT의 比較를 中心으로 -, 서울大學校 大學院 博士學位論文, 1987年 12月.

** 광운대학교 경영학과 교수

投資者의 效用函數나 收益率의 確率分布에 대하여 아무런 制約도 하지 않은 상태에서는 狀態選好模型(State Preference Model)이 도출된다. 狀態選好模型은 期待效用을 極大化하고자 하는 投資者行動에 대한 規範的 意味(normative meaning)만을 표현한 것이어서, 危險資産의 價格決定에 대한 實證的 意味(positive meaning)는 지니지 않고 있다. 實證的 意味를 지니는 資産價格決定模型을 도출해 내기 위해서는 效用函數나 收益率의 分布에 대하여 制約을 가해야 한다. 이러한 制約은 假定으로서 부과되는데, 어떠한 假定을 이용하는가에 따라서 여러가지 형태의 資産價格決定模型이 나타난다. 이 중에서 代表的인 것이 資本資産價格決定模型(Capital Asset Pricing Model : 이하 CAPM) 과 裁定價格決定模型(Arbitrage Pricing Model or Theory : 이하 APT)이다.

CAPM은 期待效用이 收益率分布의 平均과 分散만의 함수로 표현이 가능하다는 前提下에서 나타나는 資産價格決定模型이어서 平均-分散 接近法(mean-variance approach) 이라고 불리운다. 期待效用이 收益率分布의 平均과 分散만으로 표현가능하기 위해서는, 效用函數가 2次式形態(quadratic utility function)이거나 收益率이 多變量正規分布(multivariate normal distribution)이어야 한다. 반면에 APT의 도출에는 投資者의 富에 대한 限界效用이 陽이며, 收益率의 變動이 몇개의 독립적인 要因들의 線型結合으로 설명된다는 假定이 이용된다. CAPM과 APT는 그 도출가정뿐 아니라 주장의 내용도 다르게 나타난다. CAPM에서는 資産의 期待收益率이 市場포오트폴리오와의 共分散에 의하여 決定되는 것으로 나타나고, APT에서는 여러 개의 要因에 대한 共分散(또는 要因係數)에 의하여 決定되는 것으로 나타난다.

資産價格決定模型으로서 APT는 흔히 다음과 같은 몇가지 근거에서 CAPM보다 우수한 模型이라는 評價를 받고 있다.[1)]

①模型의 도출에 이용되는 假定을 비교해 보면, APT의 도출에 이용되는 假定이 덜 制約的이다.

②主張의 내용을 보면 CAPM은 APT의 한 특수한 경우로 해석할 수 있으므로, APT가 CAPM보다 포괄적이고 일반적인 模型이다.

③實證可能性의 측면을 보면, CAPM을 實證하기 위해서는 眞正한 市場포오트폴리오의 관찰이 요구되어서 실제로 實證을 할 수 없는데 反하여, APT는 市場포오트폴리오의 관찰을 필요로 하지 않는 模型이므로 部分集合만으로도 實證이 可能하다.

④實證結果를 보면 APT의 說明力이 CAPM의 說明力보다 크게 나타난다.

1) P. H. Dybvig and S. A. Ross, "Yes, The APT Is Testable," *Journal of Finance* (Sept. 1986), pp. 1173-1187, S. A. Ross, "The Current Status of the Capital Asset Pricing Model," *Journal of Finance* (June 1978), pp. 885-901.

本 硏究는 APT가 CAPM보다 우수한 模型이라고 주장되는 이러한 근거에 대하여 그 타당성여부를 밝히고, 資產價格決定模型으로서 APT가 지니는 意味를 명백히 규정하는데 그 目的이 있다.

第2節 硏究의 範圍와 構成

APT가 CAPM보다 우수한 資產評價模型이라고 평가되는 네가지 근거를 第1節에서 제시하였다. 이들 중에서 첫째와 둘째 근거는 두 모형의 理論的 差異를 비교한 것이고, 세째와 네째 근거는 實證的 측면에서의 差異를 비교한 것이다. 本 硏究에서는 이들 네가지 근거 모두에 대한 분석을 하는 것이 아니라, 理論的 差異에 관한 근거만을 그 범위로 설정하였다.

本 硏究는 3개의 章으로 구성되었다. 第1章의 序論에 이어서, 第2章에서 CAPM과 APT의 差異를 분석하고, 第3章에서 요약 결론을 제시하였다. 硏究의 本論部인 第2章은 3개의 節로 구성되었다. 第1節에서는 期待効用極大化에 의한 포오트폴리오分析을 이용하여 CAPM과 APT를 각각 도출하였다. 이러한 도출을 통하여 CAPM과 APT의 차이점을 알 수 있는데, 이 차이점을 모형도출에 필요한 假定上의 差異와 모형의 表現形態上의 差異로 분류하였다. 第2節에서는 假定의 差異를 비교하였는데, APT의 도출에 진정으로 필요한 가정이 무엇인가를 밝히는데 초점을 두었다. 기존의 硏究들이 k-要因收益生成模型을 APT의 가정으로 인식하고 있음에 반하여, 본 연구에서는 적어도 하나의 完全分散投資된 포오트폴리오가 존재한다는 것이 APT의 진정한 가정임을 보였다. 第3節에서는 모형의 表現形態와 관련되는 문제를 다루었다. APT가 CAPM보다 일반적인 表現形態를 지닌다는 점이 APT가 보다 우수한 모형이라고 인식되는 근거가 되고 있는데, 第3節에서 이러한 비교의 문제점을 밝히고, 理論內容면에서 실질적인 包含關系가 있는가를 기준으로 하여 분석하였다.

第2章 CAPM과 APT의 理論比較

CAPM과 APT의 理論上 차이점은 크게 두가지로 볼 수 있다. 첫째는 理論의 도출시에 이용되는 假定의 차이이다. CAPM에서는 投資者의 効用函數가 2次式形態(quadratic utility function)이거나 收益率이 多變量正規分布(multivariate normal distribution)를 이룬다는 가정이 이용되고, APT에서는 完全分散投資된 포오트폴리오가 적어도 하나 존재한다는 가정과 收益率의 변동이 다수의 共通要因에 의하여 설명되는 k-要因

收益生成模型(k − factor return generating process :이하 k − RGP)이 존재한다는 가정이 이용된다. 둘째는 理論이 제시하는 주장의 차이이다. CAPM은 期待收益率이 市場포오트폴리오와의 共分散에 의하여 決定이 된다는 주장이고, APT는 期待收益率이 k개 共通要因과의 共分散에 의하여 決定이 된다는 주장이다.

흔히 CAPM과 APT를 비교하면서, APT의 가정이 CAPM의 가정보다 덜 制約的이며, APT의 주장이 CAPM의 주장보다 더 일반적이라는 점을 근거로 APT가 CAPM보다 우수한 價格決定理論이라는 評價를 내린다. 本 第2章에서는 과연 APT의 가정이 CAPM의 가정보다 덜 제약적이며, APT의 주장이 CAPM의 주장보다 더 일반적인가를 밝혀서, 두 理論에 대한 比較를 하려고 한다. 第1節에서는 期待效用極大化에 의한 포오트폴리오분석의 체계를 이용하여 CAPM과 APT를 도출하고, 第2節에서는 APT의 가정이 CAPM의 가정보다 덜 제약적인가를 다루고, 第3節에서는 APT의 주장내용이 CAPM의 주장내용보다 더 일반적인가를 다룬다.

第1節 CAPM과 APT의 導出

1. 期待效用極大化에 의한 포오트폴리오分析

投資者가 현재 보유하고 있는 富를 W_0, 危險資產 i에 投資한 比率을 w_i 라고 할때, 期待效用을 極大化시키기 위한 포오드폴리오選擇問題는 다음과 같이 표현 된다.

$$\max_{w_i} E[U(\tilde{R}_p W_0)] = \max_{w_i} E[U\{(\textstyle\sum_i w_i \tilde{R}_i + (1-\sum_i w_i) R_f) W_0\}] \tag{2·1}$$

단, $\tilde{R}_p$: 포오트폴리오 p의 수익률

$\tilde{R}_i$: 위험자산 i의 수익률

R_f : 무위험자산의 수익률

式(2·1)에서 期待效用 $E[U(\cdot)]$를 극대화시키기 위하여는, w_i에 대하여 1차편미분하고 0으로 놓으면 된다.[1)]

$$E[U'(\tilde{R}_p W_0)(\tilde{R}_i - R_f)] = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{2·2}$$

현재의 富가 1원이라고 가정하고 式(2·2)를 풀이하면,

$$E[U'(\tilde{R}_p)\tilde{R}_i] = R_f\, E[U'(\tilde{R}_p)] \tag{2·3}$$

1) 極大化의 2차조건은 충족되는 것으로 가정한다.

가 된다. 극대화의 조건식 (2 · 3)을 이용하여 $U'(R_p)$와 R_i 사이의 共分散을 구하면 式(2 · 4)가 된다.

$$\begin{aligned} Cov[U'(\tilde{R}_p), \tilde{R}_i] &= E[U'(\tilde{R}_p)\tilde{R}_i] - E[U'(\tilde{R}_p)]E[\tilde{R}_i] \\ &= R_f E[U'(\tilde{R}_p)] - E[U'(\tilde{R}_p)]E[\tilde{R}_i] \\ &= -E[U'(\tilde{R}_p)][E(\tilde{R}_i) - R_f] \end{aligned} \qquad (2 \cdot 4)$$

마찬가지로 $U'(R_p)$와 R_p 사이의 共分數을 구하면,

$$Cov[U'(\tilde{R}_p), \tilde{R}_p] = -E[U'(\tilde{R}_p)][E(\tilde{R}_p) - R_f] \qquad (2 \cdot 5)$$

가 되므로, 式(2 · 4)를 式(2 · 5)로 나눈 후에 정리하면 式(2 · 6)과 같은 관계식이 나온다.

$$\frac{Cov[U'(\tilde{R}_p), \tilde{R}_p]}{Cov[U'(\tilde{R}_p), \tilde{R}_p]} = \frac{E(\tilde{R}_i) - R_f}{E(\tilde{R}_p) - R_f}$$

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \frac{Cov[U'(\tilde{R}_p), \tilde{R}_i]}{Cov[U'(\tilde{R}_p), \tilde{R}_p]}[E(\tilde{R}_p) - R_f] \qquad (2 \cdot 6)$$

式(2 · 6)은 개별자산의 期待收益率 $E(\tilde{R}_i)$와 期待效用을 극대화시켜주는 포오트폴리오 p의 期待收益率 $E(\tilde{R}_p)$사이의 관계를 보여 주고 있다.[2] 이러한 관계식은 投資者의 效用函數나 收益率의 分布에 대하여 아무런 제약도 가하지 않은 상태에서 도출이 된 것이다. 式(2 · 6)은 포오트폴리오의 선택에 대한 規範論的인 성격만을 지닌 것이며, 이 규범론적 관계식이 實證的 의미를 지니는 均衡價格決定理論으로 되기 위해서는 추가적인 가정이 필요하다.

期待效用極大化의 一般條件式에서 實證的 意味 (positive meanaining)가 있는 資產價格決定模型을 도출해 내기 위해서는, 資產의 固有危險 (idiosyncratic or residual or unsystematic risk)이 價格決定에 영향을 미치지 않도록 하기 위한 假定을 해야한다. CAPM에서는 2次式의 效用函數나 多變量正規分布를 가정하여 市場포오드폴리오의

2) 이러한 포오트폴리오의 선택문제는 収益率이 아닌 現金호름의 개념으로도 표현할 수 있다. $\tilde{X}_i$를 i기업의 현금호름, P_i를 i기업의 시장가치, W_i를 i기업에의 투자액이라고 할 때의 극대화 문제는 다음과 같다.

$MaxE[U(\tilde{X}_p)] = MaxE[U\{\sum_i \frac{W_i}{P_i}\tilde{X}_i + (W_0 - \sum_i W_i)(1+R_f)\}]$

극대화의 1차조건은 $E[U'(\tilde{X}_p)(\frac{\tilde{X}_i}{P_i} - (1+R_f))] = 0$이다. 본문의 방법과 마찬가지로 풀고, P_i에 대하여 정리하면,

$$P_i = \frac{1}{(1+R_f)}[E(\tilde{X}_i) + \frac{Cov[U'(\tilde{X}_p), \tilde{X}_i]}{E[U'(\tilde{X}_p)]}]$$

의 형태가 된다. 자세한 내용은 다음을 참조.
M. Rubinstein, "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options," *The Bell Journal of Economics* (Autumn 1976), pp. 407-425.

非體系的 危險이 소거되도록 한다. APT에서는 어떠한 形態로 APT가 표현되는가에 따라서 이용되는 假定이 다르다. 정확한 等式관계로 표현되는 S－APT (Stricit APT) 에서는 完全分散投資된 포오트폴리오가 적어도 하나 존재한다고 가정하는 직접적인 방법으로 固有危險을 소거시킨다. 制約式의 형태로 표현되는 B－APT (Bounded APT)에서는 固有危險의 소거에 대한 假定을 하지 않고 있어서, 模型이 특별한 實證的 意味를 지니지 못하고 있다. 여기서는 S-APT와 CAPM의 비교를 대상으로 한다.

2. CAPM의 導出

效用函數가 2次式 形態이거나 收益率이 多變量正規分布를 이루면, 期待效用은 收益率分布의 平均과 分散만의 함수로 표현이 가능하다. 危險回避型의 투자자는 支配原理에 따라서 포오트폴리오選擇을 하게 되는데, 無危險資産이 존재할 때 投資者는 市場포오트폴리오와 無危險資産만으로 포오트폴리오를 구성한다. 이것이 포오트폴리오分離定理(portfolio separation theorem or mutual fund separation theorem)이며,[3] 바로 S－L CAPM (Sharpe － Lintner CAPM)의 주장내용이다.

① 2次效用函數의 경우

효용함수가 2차식형태이면, 효용함수의 1차미분값은 1차식형태 $U'(\tilde{R}_p) = a + b\tilde{R}_p$가 된다. 式(2 · 6)에서의 共分散항을 풀이하면,

$$\frac{Cov[U'(\tilde{R}_p),\ \tilde{R}_i]}{Cov[U'(\tilde{R}_p),\ \tilde{R}_p]} = \frac{Cov[(a+b\tilde{R}_p),\ \tilde{R}_i]}{Cov[(a+b\tilde{R}_p),\ \tilde{R}_p]}$$

$$= \frac{Cov(\tilde{R}_p,\ \tilde{R}_i)}{Var(\tilde{R}_p)} \qquad (2 \cdot 7)$$

이 된다. 또 2차효용함수는 2資金分離定理(two fund separation theorem)를 충족시켜 주는 효용함수이므로,[4] 이제 임의의 效率的 포오트폴리오의 수익률 $\tilde{R}_p$ 대신에 市場

---

3) 어떤 경우에 分離定理가 성립하는가는 재무이론연구의 주요한 연구분야이다. Cass와 Stiglitz는 분포의 형태에 관계없이 分離定理를 성립시키는 효용함수의 형태에 대하여 연구하였고, Ross는 효용함수의 형태에 관계없이 分離定理를 성립시키는 수익률 분포의 형태에 대하여 연구하였다. 특히 수익률분포에 대한 연구는 앞으로 논의될 수익률생성모형과 밀접한 관계를 가지고 있다. D. Cass and J. Stiglitz, "The Structure of Investor Preference and Asset Returns and Separability in Portfolio Selection: A Contribution to the Pure Theory of Mutual Funds", *Journal of Economic Theory* 2(1970), pp. 122－160. S. A. Ross. "Mutual Fund Separation in Financial Theory－The Separating Distributions", *Journal of Economic Theory* 17(1978), pp. 254－286.

4) 일반적으로 分離定理가 성립하려면, 효용함수는 線型危險忍耐函數(Linear Risk Tolerance Function)를 가지는 HARA(Hyperbolic Absolute Risk Aversion) 型이어야 한다.

포오트폴리오의 수익률 $\tilde{R}_m$을 쓸 수 있다. $\tilde{R}_m$을 이용하여 式(2·6)을 다시 쓰면,

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \frac{Cov(\tilde{R}_m,\ \tilde{R}_i)}{Var(\tilde{R}_m)}\left[E(\tilde{R}_m) - R_f\right]$$
$$\equiv R_f + \lambda Cov(\tilde{R}_i,\ \tilde{R}_m) \qquad (2 \cdot 8)$$

이 되어서, 바로 S－L CAPM이 나타난다.

② 多變量正規分布의 경우

자산수익률들이 多變量正規分布를 이루면, 각 자산수익률의 線型結合인 市場포오트폴리오의 收益率 $\tilde{R}_m$은 個別資產의 收益率 $\tilde{R}_i$와 2變量正規分布(bivariate normal distribution)를 이룬다. 2變量規正分布를 이루는 確率變數 $\tilde{X}$와 $\tilde{Y}$는 임의의 함수 f에 대하여 다음과 같은 수학적 관계식을 만족시킨다.

$$Cov[\tilde{X},\ f(\tilde{Y})] = E[f'(\tilde{Y})]\,Cov(\tilde{X},\ \tilde{Y}) \qquad (2 \cdot 9)$$

式(2·9)를 이용하여, 式(2·6)에서의 共分散항을 다시쓰면,

$$\frac{Cov[U'(\tilde{R}_m),\ \tilde{R}_i]}{Cov[U'(\tilde{R}_m),\ \tilde{R}_m]} = \frac{E[U''(\tilde{R}_m)]\,Cov(\tilde{R}_m,\ \tilde{R}_i)}{E[U''(\tilde{R}_m)]\,Cov(\tilde{R}_m,\ \tilde{R}_m)} \qquad (2 \cdot 10)$$
$$= \frac{Cov(\tilde{R}_i,\ \tilde{R}_m)}{Var(\tilde{R}_m)}$$

이 되어서, 역시 S－L CAPM이 나타난다.

3. APT의 導出

정확한 等式관계의 S－APT를 도출하기 위하여는 두가지 假定이 필요하다.[5] 첫째, 收益率이 k개의 서로 독립적인 共通要因 $\tilde{\delta}_j$ ($j = 1, 2, \cdots, k$)에 의하여 다음과 같이 生成된다.

$$\tilde{R}_i = E(\tilde{R}_i) + \textstyle\sum_j b_{ij}\tilde{\delta}_j + \tilde{e}_i \qquad (2 \cdot 11)$$

단, $E(\tilde{e}_i) = E(\tilde{\delta}_j) = E(\tilde{e}_i\tilde{e}_h) = E(\tilde{e}_i\tilde{\delta}_j) = E(\tilde{\delta}_j\tilde{\delta}_k) = 0$

$Var(\tilde{\delta}_j) = 1,\ Var(\tilde{e}_i) = \sigma_i^2 < \infty$

둘째, 完全히 分散投資되어서 固有危險($\tilde{e}_i$－risk)이 없는 포오트폴리오가 적어도

5) N. Chen and J. E. Ingersoll, Jr., "Exact Pricing in Linear Factor Models with Finitely Many Assets: A Note," *Journal of Finance* (June 1983), pp. 985－988.
이후 本 論文에서 특별한 구분없이 표현한 APT는 S－APT를 의미한다.

하나 존재하며, 危險回避型의 投資者는 이것을 最適포오트폴리오로 선택한다.

이상의 두가지 假定이 충족되면 資產의 期待收益率을 k개의 要因係數 b_{ij}에 대한 관계식으로 표시할 수 있다.

期待收益率 $E(R_i)$를 k-RGP의 要因係數 b_{ij}에 대하여 母集團에서 回歸分析을 시키면,

$$E(\tilde{R}_i)=\lambda_0+\sum_j\lambda_j b_{ij}+v_i \qquad (2\cdot 12)$$

단, λ_0, λ_j : 회귀계수

v_i : 모집단에서의 회귀오차

가 되고, 回歸式의 성질에 의하여 다음이 성립한다.

$$\sum_i v_i b_{ij}=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,k) \qquad (2\cdot 13)$$

이제 固有危險이 없는 完全分散投資된 포오트폴리오의 수익률을 $\tilde{R}^*$라고 하면,

$$\tilde{R}^*=E(\tilde{R}^*)+\sum_i\sum_j b_{ij}w_i^*\tilde{\delta}_j$$

단, w_i^* : 完全分散投資된 포오트폴리오에서 資產 i의 투자비율

이 된다. 만일 이 完全分散投資된 포오트폴리오를 지닌 投資者가 投資比率을 $(w_i^*+dv_i)$로 변경한다면, $\sum_i(w_i^*+dv_i)=\sum_i w_i^*$이어서 總投資資金은 변화가 없으므로 이 새로운 포오트폴리오는 일종의 載定포오트폴리오가 된다. 그리고 원래의 完全分散投機된 포오트폴리오는 $d=0$인 특수한 경우에 期待效用을 極大化시켜준 포오트폴리오라고 볼 수 있다.

$$\begin{aligned}
0&=\frac{\partial}{\partial d}\left[EU(\tilde{R}^*+d\textstyle\sum_i v_i\tilde{R}_i)\right]\Big|_{d=0}\\
&=E[U'(\tilde{R}^*)\textstyle\sum_i v_i\tilde{R}_i]\\
&=E[U'(\tilde{R}^*)]\textstyle\sum_i v_i E(\tilde{R}_i)+E[U'(\tilde{R}^*)\sum_i v_i b_{ij}\tilde{\delta}_j]+E[U'(\tilde{R}^*)\sum_i v_i\tilde{e}_i]\\
&=E[U'(\tilde{R}^*)]\textstyle\sum_i v_i E(\tilde{R}_i)
\end{aligned} \qquad (2\cdot 14)$$

危險回避型 投資者의 限界效用은 0보다 크므로, 式(2·14)가 만족되기 위해서는 $\sum_i v_i E(\tilde{R}_i)=0$ 이어야 한다. 그런데 式(2·12)의 회귀식에서 보면, $E(\tilde{R}_i)$는 회귀식의 종속변수이고 v_i는 회귀식의 잔차이다. 회귀식에서 $\sum_i v_i E(\tilde{R}_i)=0$이 나올 수 있는 유일한 경우는, 회귀식이 완전히 적합되어서 회귀오차가 발생하지 않는 경우뿐이다. 즉 모든 v_i가 0인 것이다. 無危險資產의 경우에도 오차가 0이어야 하므로, $\lambda_0=R_f$가 된다. 式(2·12)에 $\lambda_0=R_f$, $v_i=0$을 대입한 것이 바로 APT이다.

4. CAPM과 APT의 差異

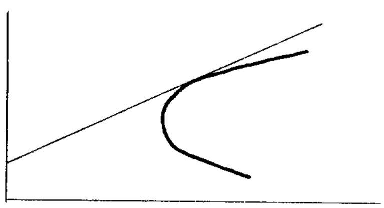
CAPM에서는 危險프레미엄이 市場포오트폴리오와의 共分散에 의하여 결정이 되는 반면에 APT에서는 危險프레미엄이 k개의 共通要因과의 共分散에 의하여 결정이 된다. 외견상, CAPM에서는 한 종류의 危險源泉을 고려하고 APT는 다수의 危險源泉을 고려하므로, APT가 더 一般的인 價格決定模型인 것처럼 보인다. 그러나 단순히 외견상의 危險源泉이 많다는 이유로 APT가 CAPM보다 우수한 資産價格決定模型이라고 말할 수는 없다. 두 模型을 제대로 비교하기 위해서는, 模型의 도출에 이용되는 假定의 制約力과 主張의 一般性을 같이 고려해야 한다. APT가 CAPM보다 우수한 模型이라는 평가를 받기 위해서는, APT의 도출에 이용되는 假定이 CAPM의 도출에 이용되는 假定보다 덜 制約的이어야 하며, APT의 主張內容이 CAPM의 主張內容을 외견상이 아니라 실질적으로 포함할 수 있어야 한다.

假定의 차이와 理論의 포함관계에 대한 比較가 다음 第2節과 第3節의 주제이다.

第2節 假定의 差異에 대한 比較

1. 假定의 差異

收益率이 多變量正規分布를 이루면 期待效用은 收益率分布의 平均과 分散의 함수가 된다. 따라서 期待效用을 極大化하고자 하는 投資者는 平均-分散기준에 의한 效率的 포오트폴리오(mean-variance efficient portfolio)를 선택하게 된다. 이때 投資者들이 未來收益率의 確率分布에 대하여 同質的인 豫測(homogeneous expectation)을 하고 市場내에 無危險資産이 존재한다면, 效率的 投資機會集合은 平均-標準偏差의 좌표상에서 직선으로 나타난다. 이것이 資本市場線(capital market line)이다. 投資者들은 각자의 태도에 따라서 無危險資産과 危險資産의 포오트폴리오를 구성하는데, 危險資産중에서는 항상 〈그림 2-1〉에서의 M만이 선택이 된다. 이때 市場이 均衡을 이루기 위해서는 이 M은 반드시 市場포오트폴리오이어야 한다.



〔그림 2-1〕 자본시장 선

이상은 CAPM의 전개과정으로서, 分布에 대한 가정으로부터 시작하여 포오트폴리오 分離의 현상에 이르는 내용이다. APT는 CAPM과 다른 시각에서 전개가 된다. 경쟁시장에서는 同一한 性格의 資産이 서로 다른 가격으로 거래될 수 없으므로 載定去來(arbitrage transaction)에 의한 利益은 존재할 수 없다. 收益率이 어떤 k − RGP를 따른다고 할 때, 投資者金이 소요되지 않으면서 危險이 없는 載定포트폴리오(arbitrage portfolio)를 구성하면 이 載定포오트폴리오의 期待收益은 0이 되어야 한다는 논리에서 APT가 나온다.

두 理論의 전개에서 가장 두드러지는 假定의 차이는, CAPM은 平均 - 分散 기준의 포오트폴리오選擇論理를 보장하기 위하여 多變量正規分布의 가정을 사용하고, APT는 載定포오트폴리오의 구성을 보장하기 위하여 完全히 分散投資된 포오트폴리오의 존재와 k-RGP를 가정한 점이다.

이외에 차이가 나는 假定으로 効用函數에 대한 가정과 市場均衡에 대한 假定이 있다. Subrahmanyam 은 効用函數와 市場均衡에 대한 가정을 비교하고서 APT가 CAPM 보다 일반적인 理論이라고 하였다.[6] 우선 効用函數를 보면, CAPM은 2次式形態의 効用函數를 가정하는 반면에, APT는 단지 不飽滿性(non - satiation)만을 가정하고 있다는 점에서 APT의 가정이 덜 제약적이라고 보았다. 또 市場均衡의 문제로서 CAPM에서는 市場포오트폴리오라는 특별한 의미를 지니는 포오트폴리오를 확정시키기 위하여 市場均衡의 가정이 반드시 필요한 반면에, APT는 단지 충분히 많은 자산이 존재한다는 가정만으로 성립이 된다고 보았다. 이러한 점에서 Subrahmanyam은 APT가 보다 일반적이라고 하였는데, 여기에는 몇가지 문제점이 있다.

첫째, Subrahmanyam은 2차식의 効用函數가 매우 특수한 형태의 効用函數인 반면에 k − RGP의 가정과 不飽滿性의 가정은 아주 약한(fairly weak)가정 이어서 APT의 假定이 덜 制約的이라고 비교하였다. 이러한 비교에서 2차식의 効用函數가정이 不飽滿性가정보다 제약이 强하다는 점은 수긍이 되지만, 2차식의 効用函數를 k − RGP와 비교하는 방법은 오류이다. k − RGP는 일종의 分布에 대한 假定이므로 k − RGP의 가정이 지니는 制約力을 검토하기 위해서는, 多變量正規分布의 가정이 지니는 制約力과 비교가 되어야 한다. 그러나 APT의 도출에 眞正으로 필요한 假定은 k − RCP가 아니라, 적어도 하나의 完全分散投資된 포오트폴리오 존재한다는 것이다. k − RGP는 假定이 아니라 항상 표현이 가능한 統計的 關係式이다.[7]

---

6) M. Subrahmanyam, "Notes on the APT and its Empirical Implications", in R. C. Stapleton, ed., "Arbitrage Pricing Theory: The Way Forward?" New York Univ., Working Paper (Oct. 1985), pp. 19 − 23.

7) k-RGP가 가정이 아니라는 점은 뒤에서 설명될 市場模型이 가정이 아니라는 점과 같은 이치이다.

k - RGP는 完全分散投資된 포오트폴리오와 관련하여 인식되는 危險을 다수의 要素로 분해하여 표시하는데 이용되는 統計的 개념인 것이다. 둘째, CAPM은 市場均衡을 요구하는 반면에 APT는 충분히 많은 자산이 존재할 것이라는 약한 가정을 사용한다는 비교의 문제점이다. APT가 충분히 많은 자산을 요구하는 이유는 危險이 없는 載定포오트폴리오의 구성을 보장시키기 위해서이다. 이때 危險중에서 資產固有의 危險(idiosyncratic risk)은 大數의 法則에 의하여 소멸이 되는데 완전히 소멸되는 것이 아니라 대략적으로(approximately)소멸이 된다. 고유위험이 완전히 소멸되지 않을 때, APT는 정확한 等式관계가 되지 않고 대략적관계를 지니게 된다.[8] APT를 정확한 等式관계로 표현하기 위해서는 모든 고유의 위험에 대하여 완전하게 分散投資된 포오트폴리오가 적어도 하나 존재할 것이 요구된다. 等式의 관계로 표현되는 模型으로는 Connor의 均衡 - APT (equilibrium - APT)가 있다. 그러나, Connor의 均衡 - APT가 성립하기 위해서는 市場均衡의 가정이 역시 요구되므로, 市場均衡조건에 의한 理論의 비교는 무의미하다.[9]

本 硏究에서는 分布의 假定에 대한 비교를 위주로 한다. 가정을 비교하기에 앞서, 우선 多變量正規分布 假定의 意味와 市場模型과 CAPM의 관계를 보기로 한다.

2. 多變量正規分布 假定의 意味

임의적인 n개의 확률변수($\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \cdots, \tilde{R}_n$)을 선형결합한 새로운 변수 $\tilde{R}_p \equiv \sum_i w_i \tilde{R}_i$가 結合加重値($w_1, w_2, \cdots, w_n$)에 관계없이 正規分布를 하면, 확률변수($\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \cdots, \tilde{R}_n$)은 多變量正規分布를 한다(逆도 成立). 또 n개의 확률변수($\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \cdots, \tilde{R}_n$) 을 선형결합하여 나오는 두개의 서로 다른 변수는 2變量 正規分布를 한다. 이제 $\tilde{R}_m$을 주어진 확률변수로부터 선형결합하여 구성한 새로운 변수라 하면, ($\tilde{R}_i$, $\tilde{R}_m$)이 2變量正規分布를 이룰 때 $\tilde{R}_m$에 대한 $\tilde{R}_i$의 條件部 確率分布를 구할 수 있다.

$\tilde{R}_m$의 특정한 값 R_m에 대한 $\tilde{R}_i$의 條健附 期待値(conditional expected value)는 다음과 같다.

$$E(\tilde{R}_i/R_m) = \int R_i f(R_i/R_m) dR_i \tag{2·14}$$

단, $f(R_i/R_m)$: 조건부확률밀도함수

만일 ($\tilde{R}_i$, $\tilde{R}_m$)이 2變量正規分布를 한다면, $E(\tilde{R}_i / R_m)$과 $Var(\tilde{R}_i / R_m)$은 다

---

8) $\Sigma_i (E(\tilde{R}_i) - \lambda_0 - \Sigma_j \lambda_j b_{ij})^2 < \infty$

9) C. Connor, "Asset Pricing in Factor Economies," Doctoral Dissertation, Yale University (1982), quoted in J. Shanken, "The Arbitrage Pricing Theory: Is it Testable?," *Journal of Finance* (Dec. 1982), p. 1136.

음과 같이 계산이 된다.

$$E(\tilde{R}_i/R_m)=\alpha_i+\beta_i R_m \tag{2·14}$$

$$\begin{aligned} Var(\tilde{R}_i/R_m) &= \int [R_i-E(\tilde{R}_i/R_m)]^2 f(R_i/R_m)\,dR_i \\ &= Var(\tilde{R}_i)\,(1-r^2) \end{aligned} \tag{2·15}$$

단, $\alpha_i \equiv E(\tilde{R}_i)-\beta_i E(\tilde{R}_m)$

$\beta_i \equiv Cov(\tilde{R}_i,\ \tilde{R}_m)/Var(\tilde{R}_m)$

$r \equiv Cov(\tilde{R}_i,\ \tilde{R}_m)/\sigma(\tilde{R}_i)\sigma(\tilde{R}_m)$

따라서 ($\tilde{R}_i / R_m$)은 기대값은 式(2·14), 분산은 式(2·15)를 가지는 正規分布를 하게 된다. 이제 $\tilde{e}_i \equiv \tilde{R}_i - (\alpha_i + \beta_i R_m)$의 條件附 確率分布를 알아보자.

$$\begin{aligned} E(\tilde{e}_i/R_m) &= E(\tilde{R}_i/R_m)-(\alpha_i+\beta_i R_m) \\ &= (\alpha_i+\beta_i R_m)-(\alpha_i+\beta_i R_m) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2·16}$$

$$\begin{aligned} Var(\tilde{e}_i/R_m) &= Var(\tilde{R}_i/R_m)+Var(\alpha_i+\beta_i R_m/R_m) \\ &= Var(\tilde{R}_i/R_m) \\ &= Var(\tilde{R}_i)(1-r^2) \end{aligned} \tag{2·17}$$

式(2·16)과 式(2·17)을 보면, ($\tilde{e}_i / R_m$)의 분포가 $\tilde{R}_m$의 영향을 받지 않고 있음을 알 수 있다. 즉, $\tilde{e}_i$ 와 $\tilde{R}_m$사이의 共分散이 0이 되는 것이다.

$$\begin{aligned} Cov(\tilde{e}_i,\ \tilde{R}_m) &= Cov[\tilde{R}_i-(\alpha_i+\beta_i\tilde{R}_m),\ \tilde{R}_m) \\ &= Cov(\tilde{R}_i,\ \tilde{R}_m)-\beta_i Var(\tilde{R}_m) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2·18}$$

여기에서 중요한 사실은 $\sum w_i\tilde{e}_i = 0$이 되어서 線型結合變數 m에는 誤差項이 존재하지 않게 된다는 것이다. 즉, $\tilde{R}_m$을 전개하면,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_m &= \sum w_i \tilde{R}_i \\ &= \sum w_i(\alpha_i+\beta_i\tilde{R}_m+\tilde{e}_i) \\ &= \sum w_i\alpha_i+\sum w_i\beta_i\tilde{R}_m+\sum w_i\tilde{e}_i \end{aligned} \tag{2·19}$$

가 된다. 이때,

$$\begin{aligned} \sum w_i\beta_i &= \sum w_i\ Cov(\tilde{R}_i,\ \tilde{R}_m)/Var(\tilde{R}_m) \\ &= Cov(\tilde{R}_m,\ \tilde{R}_m)/Var(\tilde{R}_m) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2·20}$$

$$\sum w_i \alpha_i = \sum w_i \left[E(\tilde{R}_i) - \beta_i E(\tilde{R}_m)\right]$$
$$= E(\tilde{R}_m) - \sum w_i \beta_i E(\tilde{R}_m)]$$
$$= 0 \qquad (2 \cdot 21)$$

이므로, 이들을 式(2·19)에 대입시키면 $\sum w_i \tilde{e}_i = 0$이 증명된다.

이상에서 얻어진 내용을 요약하면 다음과 같다.

〈定理 2 - 1〉 $\tilde{R}_i$ 와 $\tilde{R}_m$ 이 2變量正規分布를 이루면 다음이 成立한다.

① $E(\tilde{R}_i/R_m) = \alpha_i + \beta_i E(\tilde{R}_m)$

② $E(\tilde{e}_i/R_m) = E(\tilde{e}_i) = 0$

③ $Var(\tilde{e}_i/R_m) = Var(\tilde{e}_i)$ (2·22)

④ $Cov(\tilde{e}_i, \tilde{R}_m) = 0$

⑤ $\sum w_{im} \tilde{e}_i = 0$

3. 市場模型과 CAPM

市場模型은 效率的포오트폴리오의 구성에 대한 계산을 간편하게 해주기 위한 목적으로 Sharpe에 의하여 처음 제시되었다.[10] 이후 均衡價格理論과 결부되어서 危險을 體系的 危險과 非體系的 危險으로 분리하는 해석을 가능하게 하였으며, 實證硏究를 위한 기본모형으로 활용하게 되었다. Sharpe에 의해 제시된 市場模型은 다음과 같다.[11]

$$\tilde{R}_i = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_m + \tilde{e}_i \qquad (2 \cdot 23a)$$

$$E(\tilde{e}_i) = 0 \qquad (2 \cdot 23b)$$

$$Cov(\tilde{e}_i, \tilde{R}_m) = 0 \qquad (2 \cdot 23c)$$

$$Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = 0 \qquad (2 \cdot 23d)$$

Sharpe는 式(2·23)에 있는 4가지式을 모두 가정이라고 하였는데, 이중에서 a, b, c는 가정이 아니다. 임의의 확률변수 $\tilde{R}_i$ 와 $\tilde{R}_m$이 있다고 하면, 언제라도 a, b, c를 만족시키는 관계식의 構成이 가능하다.[12] 市場模型에서는 d만이 유일한 가정이다. Fama는

10) W. F. Sharpe, "A Simplified Model for Portfolio Analysis", *Management Science*(Jan. 1963), pp. 277-293.

11) Sharpe의 63년 논문은 CAPM이 발표되기 전이어서, 市場포오트폴리오의 개념을 사용하지 않고 일반적인 지수로 표현하였다.
"…the returns of various securities are related only through common relationships with some basic underlying factor. …The index, I, may be the level of the stock market as a whole, the Gross National Product, some price index or any other factor thought to be the most important single influence on the returns…"

12) A. Beja, "On Systematic and Unsystematic Components of Financial Risk", *Journal of Finance*(Jan. 1972), pp. 37-45.

市場模型을 적용시키면 Sharpe의 균형식과 Lintner의 균형식이 서로 차이가 나는데, 이를 해결하기 위해서는 市場포오트폴리오 대신에 다른 포오트폴리오를 써야 한다고 하였다.[13] 市場模型을 Sharpe의 균형식에 적용시키면,

$$\begin{aligned} E(\tilde{R}_i)-R_f &= \lambda Cov(\tilde{R}_i,\ \tilde{R}_m) \\ &= \lambda Cov(\alpha_i+\beta_i\tilde{R}_m+\tilde{e}_i,\ \tilde{R}_m) \\ &= [E(\tilde{R}_m)-R_f]\beta_i \end{aligned} \tag{2·24}$$

이며, Lintner의 균형식에 적용시키면,

$$\begin{aligned} E(\tilde{R}_i)-R_f &= \lambda \textstyle\sum_j w_j Cov(\tilde{R}_i,\ \tilde{R}_j) \\ &= \lambda \textstyle\sum_j w_j Cov(\alpha_i+\beta_i\tilde{R}_m+\tilde{e}_i,\ \alpha_j+\beta_j\tilde{R}_m+\tilde{e}_j) \\ &= \lambda [\beta_i \textstyle\sum_j w_j \beta_i Var(\tilde{R}_m)+\sum_j w_j Cov(\tilde{e}_i,\ \tilde{e}_j)] \\ &= [E(\tilde{R}_m)-R_f][\beta_i+\frac{w_i Var(\tilde{e}_i)}{Var(R_m)}] \end{aligned} \tag{2·25}$$

가 되어서, 두 결과는 차이가 난다. Fama는 만일 w_i 와 $Var(\tilde{e}_i)$가 작다면 두 결과는 거의 비슷하다고 해석을 하였다. 그러나 이러한 차이가 나온 원인은 式(2·23d)를 사용하여 Lintner式을 전개시켰기 때문이다. 즉, 式(2·25)에서

$$\textstyle\sum_j w_j Cov(\tilde{e}_i,\ \tilde{e}_j) = w_i Var(\tilde{e}_i)+\sum_{j\neq i} w_j Cov(\tilde{e}_i,\ \tilde{e}_j) \tag{2·26}$$

로 나누고서, $Cov(\tilde{e}_i,\ \tilde{e}_j)=0$ 이라는 가정을 적용시켰기 때문이다. 市場模型에서는 항상 $\sum_j w_j\tilde{e}_j = 0$이 성립되므로, 두 모형은 차이가 없는 것이다. 이러한 사실은 Beja에 의하여 지적되었다.[14] Fama도 이를 시인하고 여기서 한걸음 더 나가서, 分布에 대한 가정과 市場模型사이의 관계를 밝혔는데 式(2·22)의 〈定理2-1〉에 나와 있듯이, 2變量正規分布의 가정을 하면 $E(\tilde{e}_i/R_m)=0$이 되어서 線型市場模型 $E(\tilde{R}_i/R_m)=\alpha_i+\beta_i R_m$이 성립한다.[15]

Stapleton과 Subrahmanyam은 分布에 대한 가정없이 線型市場模型(linear market model)의 가정만으로도 CAPM이 도출됨을 보이고, 多變量正規分布의 가정과 線型市場模型의 가정은 동일하다고 하였다.[16]

---

13) E. F. Fama, "Risk, Return and Equilibrium; Some Clarifying Comments," *Journal of Finance*(March 1968), pp. 29-40.

14) A. Beja, op. cit.

15) E. F. Fama, "A Note on the Market Model and the Two-Parameter Model", *Journal of Finance*(Dec. 1973), pp. 1181-1185.

16) R. C. Stapleton and M. C. Subrahmanyam, "The Market Model and Capital Asset Pricing Theory; A Note", *Journal of Finance*(Dec. 1983), pp. 1637-1642.

第1節에서 이용한 期待效用極大化의 조건을 다시 쓰면

$$E(\tilde{R}_i)-R_f=\frac{Cov[\tilde{R}_i,\ U'(\tilde{R}_m)]}{Cov[\tilde{R}_m,\ U'(\tilde{R}_m)]}[E(\tilde{R}_m)-R_f] \tag{2·27}$$

이다. 이제 線型市場模型이 성립한다면,

$$\begin{aligned} Cov[\tilde{R}_i,\ U'(\tilde{R}_m)] &= Cov[\alpha_i+\beta_i\tilde{R}_m+\tilde{e}_i,\ U'(\tilde{R}_m)] \\ &= \beta_i Cov[\tilde{R}_m,\ U'(\tilde{R}_m)]+Cov[\tilde{e}_i,\ U'(\tilde{R}_m)] \\ &= \beta_i Cov[\tilde{R}_m,\ U'(\tilde{R}_m)]+E[\tilde{e}_i U'(\tilde{R}_m)]-E(\tilde{e}_i)E[U'(\tilde{R}_m)] \end{aligned} \tag{2·28}$$

이다. 이때 가정에 의하여 $E(\tilde{e}_i/R_m)=0$ 이므로, $E[\tilde{e}_i/U'(R_m)]=0$이 역시 성립하며 따라서 $Cov[\tilde{e}_i,\ U'(\tilde{R}_m)]=0$이다. 式(2·28)에 代入하면, $Cov[\tilde{R}_i,\ U'(\tilde{R}_m)]=\beta_i Cov[\tilde{R}_m,\ U'(\tilde{R}_m)]$이 된다. 이를 式(2·27)에 代入하면,

$$E(\tilde{R}_i)-R_f=\beta_i[E(\tilde{R}_m)-R_f] \tag{2·29}$$

가 되어서 S-L CAPM이 나온다.[17]

결국, 多變量正規分布의 가정이나 線型市場模型의 가정은 모두가 2資金分離(two fund separation)라는 동일한 결과를 내므로, 두 가정은 본질적으로 같은 내용이라고 할 수 있다. 이러한 線型市場模型이나 APT에서 이용되는 k-RGP는 分離定理를 성립시키는 分布에 대한 條件과 유사한 형태를 취하고 있다. 이제 이 分離를 일으키는 分布의 조건을 이용하여서, 線型市場模型과 k-RGP의 意味를 比較한다.

4. 分離定理와 分布의 假定

Ross는 效用函數의 형태에 관계없이 資金分離를 일으키기 위한 分布에 대한 必要充分조건을 연구하였다.[18] 2資金分離(two fund separation)가 일어나기 위한 必要充分조건은 다음 4가지 조건을 만족시키는(b_i, w_{im}, $\tilde{\delta}$, $\tilde{e}_i$)가 존재하여야 한다는 것이다.

$$\tilde{R}_i=R_f+b_i\tilde{\delta}+\tilde{e}_i \tag{2·30a}$$

$$E(\tilde{e}_i/\delta)=0 \tag{2·30b}$$

$$\textstyle\sum_i w_{im}\tilde{e}_i\equiv 0 \tag{2·30c}$$

$$\textstyle\sum_i w_{im}=1 \tag{2·30d}$$

17) Stapleton과 Subrahmanyam은 市場포오트폴리오가 正規分布를 이룬다는 가정이 추가되어야 S-L CAPM이 성립한다고 하였는데, 본문에서 보듯이 이러한 추가가정은 필요없다.

18) S. A. Ross (1978), op. cit.

條件 b 는 $\tilde{e}_i$ 가 $\tilde{\delta}$에 대하여 公正게임 (fair game)이 되어야 한다는 의미로서, 條件 a와 더불어 線型要因模型 (linear factor model)을 형성시킨다. 條件 c 와 條件 d 는 시장내에 殘差危險을 가지지 않는 完全分散投資된 포오트폴리오가 하나 존재할 것을 요구하고 있다. 이 4가지 條件이 충족되면, 2資金分離가 일어나서 S－L ACPM이 성립한다. 確率變數 ($\tilde{R}_{ti}$, $\tilde{R}_m$)이 2變量正規分布일 때 나타나는 線型市場模型이 성립하기 위한 조건은 式 (2·22)인데, 이들은 式 (2·30)의 조건을 모두 포함하고 있다.

따라서 2變量正規分布에서는 2資金分離가 일어난다. 價格理論의 도출시에 2變量正規分布의 가정대신에, 完全分散投資된 하나의 포오트폴리오가 존재한다는 가정과 k-RGP 라는 統計的 關係式을 이용하면 APT가 도출이 되었다. 만일 이러한 가정에 따라서 도출된 APT가 k資金分離 (k fund separation)를 일으킨다면, APT가 CAPM보다 일반적인 理論이라고 할 수가 있을 것이다. 이 관계를 보자.

k資金分離가 일어나기 위한 必要充分조건은 모든 $j=1, 2, \cdots, k$에 대하여 다음 4조건을 만족시키는 (b_{ij}, w_{ij}, $\tilde{\delta}_j$, $\tilde{e}_i$)가 존재해야 한다는 것이다.

$$\tilde{R}_i = R_f + \textstyle\sum_j b_{ij}\tilde{\delta}_j + \tilde{e}_i \qquad (2\cdot31a)$$

$$E(\tilde{e}_i/\delta_1, \cdots, \delta_k) = 0 \qquad (2\cdot31b)$$

$$\textstyle\sum_i w_{ij}\tilde{e}_i \equiv 0 \qquad (2\cdot31c)$$

$$\textstyle\sum_i w_{ij} = 1 \qquad (2\cdot31d)$$

條件 a 와 條件 b 는 線型要因模型이 존재할 것을 요구하는 것이고, 條件 c 와 條件 d는 完全分散投資된 포오트폴리오가 k개 존재할 것을 요구하는 것이다. 한편 k－RGP의 내용을 다시 써보면 다음과 같다.

$$\tilde{R}_i = E(\tilde{R}_i) + \textstyle\sum_j b_{ij}\tilde{\delta}_j + \tilde{e}_i \qquad (2\cdot32a)$$

$$E(\tilde{e}_i) = E(\tilde{\delta}_j) = 0 \qquad (2\cdot32b)$$

$$Var(\tilde{e}_i) = \sigma^2,\ Var(\tilde{\delta}_j) = 1 \qquad (2\cdot32c)$$

$$Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_k) = Cov(\tilde{e}_i, \tilde{\delta}_j) = Cov(\tilde{\delta}_j, \tilde{\delta}_k) = 0 \qquad (2\cdot32d)$$

이들 조건을 式 (2·31)과 비교해 보면, k－RGP만으로는 k資金分離가 일어나지 않음을 알 수 있다. 만일 k－RGP가정에 의하여 APT가 성립하였다면, $E(\tilde{R}_i) = R_f + \Sigma_j b_{ij}\lambda_j$가 만족되므로 이것을 式(2·32a)에 대입하면,

$$\begin{aligned}\tilde{R}_i &= R_f + \textstyle\sum_j b_{ij}(\tilde{\delta}_j + \lambda_j) + \tilde{e}_i \\ &\equiv R_f + \textstyle\sum_j b_{ij}\tilde{Y}_i + \tilde{e}_i \end{aligned} \qquad (2\cdot33)$$

가 된다. 式(2·33)과 같은 要因模型이 k資金分離를 일으키려면, 殘差危險이 없는 포오트폴리오가 k개 존재한다는 가정이 있어야 한다. 그런데 式(2·32)의 k-RGP내용을 보면 그러한 가정은 없다. 따라서 k資金分離는 일어나지 않는다. 실제로 APT는 分離現象에 대한 명시적인 언급은 하지 않고 있다. 그러나 完全分散投資된 포오트폴리오가 존재한다면 危險回避의 투자자들은 모두 그러한 포오트폴리오를 소유할 것이므로, 資金分離와 같은 의미가 된다. APT의 도출에서는 이러한 포오트폴리오가 적어도 하나 존재할 것만이 요구되므로 구체적으로 몇개의 資金이 分離되는가는 알 수 없다. 따라서 資金分離의 입장에서 볼 때, CAPM과 APT는 우열을 가릴 수 없다.

5. APT 假定으로서의 k-RGP

k-RGP에서는 資産의 固有危險(殘差危險 또는 非體系的 危險)간에 相關關係가 존재하지 않을 것이 요구된다. 만일 固有危險간에 相關關係가 존재한다면, k개이외의 共通要因이 存在한다는 의미이기 때문이다. 固有危險간에 相關關係가 존재하지 않기 위해서는 k가 收益率간의 共分散行列 V의 位數(rank)와 같아야 한다. 즉, $(N\times N)$의 行列 V의 位數가 L이라고 하면, 要因의 갯수를 L개로 설정하여야 $Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)=0$이 보장이 되는 것이다.

$$V=BB'+D \tag{2·34}$$

여기에서 B는 $(N\times L)$의 要因간의 共分散行列이고, D는 대각원소로 $Var(\tilde{e}_i)$ $(i=1, 2, \cdots, N)$를 가지고 나머지 원소는 0인 對角行列(diagonal matrix)이다.

變數가 주어지면 式(2·34)를 만족시키는 要因構造 즉, k-RGP는 항상 구성이 가능하다. 따라서 收益率이 k-RGP를 따른다는 것은 假定이 아니다. 흔히 APT의 우수성을 주장하는 근거로서, CAPM의 多變量正規分布보다 k-RGP가 덜 제약적인 假定이라는 점이 거론되는데, 이것은 k-RGP의 속성에 대한 認識不足때문으로 보인다.

k-RGP가 APT에서 차지하는 위치를 알아 보자. S-APT가 성립하기 위해서는 完全分散投資된 포오트폴리오가 적어도 하나 존재할 것이 요구된다. 이 포오트폴리오를 p라고 하고, 個別資産과의 共分散을 구해 보면, $\tilde{e}_p=0$이므로

$$\begin{aligned} Cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_p) &= Cov(E_i+\textstyle\sum_j b_{ij}\tilde{\delta}_j+\tilde{e}_i,\ E_p+\sum_j b_{pj}\tilde{\delta}_j+\tilde{e}_p) \\ &= \textstyle\sum_j b_{ij}b_{pj}Var(\tilde{\delta}_j)+Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_p) \\ &= \textstyle\sum_j b_{ij}b_{pj} \end{aligned} \tag{2·35}$$

가 되어서, 資産의 危險이 共通要因에 대한 係數만으로 測定이 된다. 式(2·35)의 도출 과정에서 보면, $Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_h)=0$ 이라는 관계식은 요구되지 않는다. 따라서 RGP에서 共通要因의 갯수를 共分散行列 V의 位數와 같게 하지 않더라도 S-APT가 도출이 가능하다. S-APT의 도출에 眞正으로 필요한 가정은, 적어도 하나의 完全分散投資된 포오트폴리오가 존재하여야 한다는 것이고, k-RGP는 資産의 危險을 다수의 要素로 分解하여 表示하는데 이용되는 統計的 수단일 뿐이다.

이제 完全分散投資된 포오트폴리오의 존재가 보장되지 않는 경우의 의미를 보자. $\tilde{e}_p \neq 0$ 이므로,

$$\begin{aligned} Cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_p) &= \sum_j b_{ij} b_{mj} + Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_p) \\ &= \sum_j b_{ij} b_{mj} + Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_h) + w_{ip} Var(\tilde{e}_i) \end{aligned} \tag{2·36}$$

이다. 여기에서 w_{ip}는 포오트폴리오 p에서 資産 i의 投資比重이다. 만일 共通要因의 갯수를 V의 位數와 같게 설정한다면, $Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_h)$는 0이 된다. 그러나 우변의 마지막 항 $w_{ip} Var(\tilde{e}_i)$는 소거되지 않고 남아있게 되므로, 資産의 價格決定에 固有危險이 영향을 미치게 된다. 따라서 k-RGP만으로는 S-APT가 성립하지 않는다.

CAPM이 多變量正規分布의 假定을 통하여 固有危險이 價格決定과정에 영향을 미치지 못하도록 한 반면에, S-APT는 固有危險이 없는 포오트폴리오의 존재를 직접적으로 假定하는 방법을 취하고 있다. 이러한 점에서 APT는 理論이 없는 단순한 統計的 表現이라는 비판을 받는다. 이에 대하여 APT를 옹호하는 학자들은, 完全分散投資된 포오트폴리오의 존재를 假定하지 않고도 APT를 도출할 수 있다고 주장을 하였다.[19] 만일 經濟內에 資産이 많이 존재하고, 個別資産의 固有危險 $Var(\tilde{e}_i)$가 작은 수치라면, 式(2·36)의 마지막 항은 거의 0이 되므로 APT가 성립한다는 것이다. 이 경우에 資産이 많이 존재하며 $Var(\tilde{e}_i)$가 크지 않다는 이러한 假定은 現實世界와 크게 어긋나지 않으며, 收益率이 多變量正規分布를 한다는 假定보다 制約이 적은 假定이라는 주장이다. 그러나 이러한 주장에는 두가지 문제점이 있다. 첫째, 이러한 假定으로도 $w_{ip} Var(\tilde{e}_i)$가 완전히 0이 되는 것이 아니라, 資産의 數가 커질 때 점근적으로 0에 가까와질 뿐이다. $w_{ip} Var(\tilde{e}_i)$가 완전히 0이 될 수 있는 경우는, 모든 $Var(\tilde{e}_i)$가 0이 되는 完成市場(complete market)일 때이다.[20] 그러나 完成市場은 多變量正規分布보다 制約力이 强한 假定이다. 둘째, 資産이 많고 $Var(\tilde{e}_i)$가 작다는 假定만으로는 $Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_h)=0$ 이 보장되지 않는다. 앞에서

19) P. Dybvig and S. Ross, op. cit., p. 1181.

20) 未來狀態의 數와 서로 독립적인 資産의 數가 같은 市場을 完成市場이라고 한다. 完成市場에서는 資産을 純粹證券(pure security or state contingent claim)의 線型結合으로 나타낼 수 있다. 따라서 어떤 특정한 資産의 收益率分布는 純粹證券收益率의 結合分布로 완전히 설명되며, 資産의 固有危險 $Var(\tilde{e}_i)$는 항상 0이 된다.

설명하였듯이 共通要因의 갯수 k가 共分散行列 V의 位數 L과 같아져야만 $Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_h) = 0$이 성립한다. 그러나 共通要因이 그렇게 많아져서는 APT의 實質的 價値가 없어진다. 統計的으로 要因分析(factor analysis)를 하는 목적도, 주어진 資料를 몇 개의 비중이 큰 要因만으로 說明하는 것이다. 實際의 APT研究들을 보아도, 대개 10개이내의 共通要因을 利用하고 있다. $Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_h) = 0$이 되기 위해서는 共分散行列 V의 位數가 10이내이어야 하는데, V의 位數가 그렇게 작을 것이라는 기대는 너무 비현실적이다. 共通要因의 갯수를 V의 位數보다 작게 잡으면, 式(2·34)에서 D는 對角行列이 되지 않고 $Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_h) \neq 0$이 된다. 따라서 APT는 정확한 等亦관계가 아니라 대략적인 관계로 표현이 된다. 서로 표현상태가 다른 模型의 假定들을 비교해서는 정확한 평가를 알 수 없다. 정확한 평가를 위해서는 CAPM의 多變量正規分布假定은 S-APT의 完全分散投資의 포오트폴리오 假定과 비교되어야 한다. 그런데 앞에서 설명하였듯이 두模型의 假定은 서로 同一한 내용이므로, 假定을 비교하여 APT의 假定이 덜 制約的이라고 하는 主張은 그 타당성이 없다.

第3節 理論의 包含關係에 대한 比較

CAPM과 APT의 論理的 包含關係에 대하여는 서로 相反된 주장이 있다. Roll과 Ross는 APT에 대한 實證論文에서 " CAPM에 대한 많은 논의를 보면, 共通要因이 하나일 때의 APT를 다룬 것이다"라고 APT 우위를 표명했다.[21] 반면에 Shanken은 APT의 實證可能性을 다룬 論文에서 "사람들은 APT를 연구하면서 실제로는 CAPM을 Multi $-\beta$ 형태로 확장시킨 모형을 다룬 것이다."라고 CAPM의 일반성을 주장했다.[22] 本節에서는 이러한 주장의 내용을 각각 살펴 본 후에, 그 타당성여부를 검토한다. 만일 어느 한 理論이 다른 理論의 특수한 형태에 불과하여 두理論사이에 명백한 包含關係가 성립한다면, 理論의 우월성여부에 대한 판단이 가능해질 것이다.

1. APT의 一般性

APT가 보다 일반적인 理論이라는 주장은, CAPM은 共通要因이 한 개일 때 나타나는 특수한 APT형태이며, 共通要因이 k개 있을 때의 CAPM이 APT와 같다는 사실을 그 근

21) R. Roll and S. Ross, "An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory", *Journal of Finance* (Dec. 1980), pp. 1073-1104.
22) J. Shanken, "Multi-Beta CAPM or Equilibrium-APT?: A Reply", *Journal of Finance* (Sept. 1985), pp. 1189-96.

거로 삼고 있다.

共通要因이 하나만 존재할 때의 1－RGP와 1要因－APT는 다음과 같다.

$$\tilde{R}_i = E(\tilde{R}_i) + b_i \tilde{\delta} + \tilde{e}_i \qquad (2\cdot37)$$

$$E(\tilde{R}_i) = \lambda_0 + \lambda b_i \qquad (2\cdot38)$$

式(2·38)는 CAPM과 동일한 형태이며, 만일 유일한 共通要因 $\tilde{\delta}$가 市場포오트폴리오와 높은 相關關係를 지닌다면 要因係數 b_i는 CAPM의 β_i와 거의 같아진다. 이 경우에 1要因－APT와 CAPM은 實證上 거의 구별이 되지 않는다.

共通要因이 k개 존재할 때의 k－RGP와 k要因－APT는 다음과 같다.

$$\tilde{R}_i = E(\tilde{R}_i) + \sum_j b_{ij} \tilde{\delta}_j + \tilde{e}_i \qquad (2\cdot39)$$

$$E(\tilde{R}_i) = \lambda_0 + \sum_j b_{ij} \lambda_j \qquad (2\cdot40)$$

이제 k－RGP下에서 CAPM이 어떠한 형태를 지니는가를 살펴보자. w_{im}을 市場포오트폴리오에서 資產 i가 차지하는 比重이라고 하면,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_m &= \sum_i w_{im} \tilde{R}_i \\ &= \sum_i w_{im} E(\tilde{R}_i) + \sum_j \sum_i w_{im} b_{ij} \tilde{\delta}_j + \sum w_{im} \tilde{e}_i \\ &= E(\tilde{R}_m) + \sum_j b_{mj} \tilde{\delta}_j + \sum w_{im} \tilde{e}_i \end{aligned} \qquad (2\cdot41)$$

이 된다. 이를 CAPM에 代入하면,

$$\begin{aligned} E(\tilde{R}_i) - R_f &= \lambda Cov(\tilde{R}_i,\ \tilde{R}_m) \\ &= \lambda Cov[E(\tilde{R}_i) + \sum_j b_{ij} \tilde{\delta}_j + \tilde{e}_i,\ E(\tilde{R}_m) + \sum_j b_{mj} \tilde{\delta}_j + \sum_i w_{im} \tilde{e}_i] \\ &= \lambda [\sum_j b_{ij} b_{mj} Var(\tilde{\delta}_j) + \sum_i w_{im} Var(\tilde{e}_i)] \\ &= \lambda \sum_j b_{ij} b_{mj} \\ &\equiv \sum_j b_{ij} \lambda_j \end{aligned} \qquad (2\cdot42)$$

가 된다(단, $\lambda_i = \lambda b_{mj}$), 式(2·39)를 보면 이것은 APT와 동일한 형태이다. 즉 k－RGP下에서의 CAPM은 곧 APT를 의미하는 것이다. 이상과 같이 CAPM이 APT의 部分理論이 된다는 점이 APT가 보다 일반적인 資產價格決定模型이라는 근거가 되고 있다.[23]

式(2·42)는 k－RGP를 이용하여 CAPM을 전개시킨 형태인데, 그 결과는 APT와

23) P. H. Dybvig and S. A. Ross, op. cit.

같은 형태이다. 이때 도출에 이용된 k −RGP는 가정이 아니라 항상 통계적으로 성립시킬 수 있는 내용이다. 이 과정에서 이용된 가정은 $\tilde{e}_m = 0$이라고 한 점이다. $\tilde{e}_m = 0$이 될 수 있는 경우는 完成市場(complete market)이 되어서 모든 자산이 $\tilde{e}_i = 0$이 되거나, 모든 투자자가 m이라는 포오트폴리오만을 지닐 때이다. 만일 $\tilde{e}_m = 0$ 보장되지 않는다면 式(2·42)는 대략적으로만 성립을 하게 된다.

2. CAPM의 一般性

Stapleton은 CAPM이 APT보다 더 일반적인 理論이라고 주장하면서, 10년 이내에 APT는 하나의 흥미있는 특수경우로만 언급이 될 것이라고 예측까지 하였다.[24]

Stapleton의 주장은 CAPM의 도출에는 要因模型의 가정이 필요가 없는 반면에 APT의 도출에는 要因模型의 가정이 필요하므로, CAPM이 보다 덜 제약적인 理論이라는 것이다. 또한 Stapleton은 要因들이 CAPM에 따라서 價格決定이 된다면, APT는 CAPM과 같은 의미를 지닌다는 것을 보임으로써 APT가 CAPM의 部分理論에 불과하다고 하였다.[25]

APT에서의 危險價格 (λ_j)은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$E(\tilde{R}_i)-R_f=\sum_j \lambda_j b_{ij}$$
$$=\sum_j [E^j-R_f]b_{ij} \tag{2·43}$$

여기서 E^j는, j 要因에 대한 要因係數는 1이고 나머지 要因에 대한 係數는 0인 포오트폴리오의 期待收益率이다. 만일 모든 要因 또는 要因과 完全相關된 포오트폴리오들이 多變量正規分布를 하여서 CAPM에 따라서 價格決定이 된다면,

$$E^j-R_f=\beta_{jm}[E(\tilde{R}_m)-R_f] \tag{2·44}$$

이 된다. 이것을 式(2·43)에 代入하면,

$$E(\tilde{R}_i)-R_f=\sum_j b_{ij}\beta_{jm}[E(\tilde{R}_m)-R_f]$$

$$=\sum_j b_{ij}\frac{Cov(\tilde{\delta}_j,\ \tilde{R}_m)}{Var(\tilde{R}_m)}[E(\tilde{R}_m)-R_f]$$

$$=\frac{1}{Var(\tilde{R}_m)}Cov(\sum_j b_{ij}\tilde{\delta}_j,\ \tilde{R}_m)[E(\tilde{R}_m)-R_f]$$

24) D. Stapleton, op. cit., p. 10.
"…in 10 years time, the APT will be regarded as an interesting special case(of the CAPM). …"

25) ibid., pp. 14−15.

$$= \frac{1}{Var(\tilde{R}_m)} Cov(\tilde{R}_i,\ \tilde{R}_m)[E(\tilde{R}_m)-R_f]$$

$$= \beta_{im}[E(\tilde{R}_m)-R_f] \qquad (2\cdot45)$$

이 되어서 CAPM과 같아진다.

3. APT와 Multi－β CAPM

이상의 내용을 보면, CAPM에서 APT를 도출해 낼 수 있고 APT에서 CAPM을 도출해 낼 수 있다. 따라서 어느 한 주장만 받아들여서 한 理論이 다른 理論을 包含한다는 식의 결론은 내릴 수 없다. APT의 도출에는 完全分散投資된 포오트폴리오가 하나 존재할 것이 요구되었었다. 결국 APT는, 이 포오트폴리오의 위험을 발생시키는 요인들을 이용하여 개별자산의 위험프레미엄을 분해하여 표시한 모형이라고 볼 수 있다. 만일 이렇게 분해된 위험프레미엄들이 각각 특별한 경제적의미를 부여받는다면 APT는 CAPM보다 현실설명력이 우수하다고 할 수 있을 것이다. 그러나 k－RGP의 가정에서는 要因이 k개 존재한다고만 가정을 할 뿐 그 요인이 무엇을 의미하는지 까지는 밝혀지지 않는다. 이러한 점에서도 APT는 理論이 없는 단순한 統計的 表現 이라고 비판을 받는다. 第2節에서는 假定의 차이에 대한 비교로는 우열을 가질 수 없다고 하였는데, 理論的 包含關係역시 우열구분이 안되므로, 理論的 측면에서 볼 때 CAPM과 APT는 거의 유사한 模型이라고 할 수 있다.

APT에 대한 비판으로는 APT의 전개가 經濟的 意味를 지니지 않는 k개의 共通要因에 근거하고 있기 때문에 理論이 없는 經驗主義에 불과하다는 점이 있다. 그러나 APT는 平均－分散의 接近法이 아니라, 경쟁시장에서는 載定利益이 存在할 수 없다는 보다 直觀的인 개념을 이용하여 價格決定을 說明해 주었다는 점에서 그 의의를 찾을 수 있다.

CAPM과 APT는 어느 한 理論이 다른 理論을 완전히 代替시키는 경쟁적관계에 있는것이 아니라, 서로 보완적 관계에 있다(not supplant but supplement).[26] 多數의 危險要因을 고려한 模型을 硏究한다고 할 때, 危險價格(price of risk)의 符號나 크기에 관심을 가진다면 APT보다는 multi－β CPAM을 이용하는 것이 바람직하다. 예를 들어, skewness를 고려한 硏究를 할 때, APT로는 skewness에 대한 危險價格의 符號나 크기를 알 수 없지만, CAPM을 확장시키면 가능해진다.[27]

26) W. F. Sharpe, ***Investments***, 3rd ed.(New Jersey: Prentice－Hall, 1985), p. 199.

27) A. Kraus and R. H. Litzenberger, "Skewenss Preference and the Valuation of Risk Assets," ***Journal of Finance***(Sept. 1976), pp. 1085－1100.

만일 硏究의 관심이 危險價格보다는 危險自體의 고려에 두어진다면 APT를 이용하는 것이 편리하다. 즉, 理論的으로는 영향력의 정도를 알 수 없지만 現實的으로는 분명히 영향력이 존재하는 外生要因(예를 들어서 油價)을 고려해야 할 때는 APT를 이용하는 것이다.[28)]

〈表 2-1〉 資產價格決定模型의 比較

	CAPM	S-APT	B-APT
1. 理論의 導出			
① 假 定	多變量正規分布	完全分散投資된 포오트폴리오	k-RGP
② 投資者行動	平均-分散기준의 選擇	裁定利益의 추구	裁定利益의 추구
③ 模型	$E_i=\lambda_0+\lambda_1\beta_i$	$E_i=\lambda_0+\sum_j\lambda_j b_{ij}$	$\sum_{i=1}^{\infty}(E_i-\lambda_0-\sum_j\lambda_j b_{ij})^2<\infty$
2. 理論의 擴張			
① 假定	k-RGP	要因의 多變量正規分布	大規模經濟, 작은 $Var(\bar{e}_i)$
② 模型	$E_i=\lambda_0+\sum_j(b_{mj}\lambda_j)b_{ij}$	$E_i=\lambda_0+\sum b_{ij}\beta_{jm}(E_m-R_f)$	$E_i\simeq\lambda_0+\sum_j\lambda_j b_{ij}$
③ 意味	危險價格이 APT보다 잘 설명이 된다. (理論硏究에 도움)	危險이 CAPM보다 잘 설명이 된다. (實證硏究에 도움)	裁定利益의 不在라는 직관으로 價格決定을 설명했다.

〈表 2-1〉은 資產價格決定模型사이의 관계를 요약한 것이다. 表에서 理論의 導出部分은 本章의 第1節과 第2節에 대한 내용이고, 理論의 擴張部分은 第3節에 대한 내용이다. B-APT의 導出에 대한 내용은 本 硏究의 범위를 넘으므로 여기서는 다루지 않았다.

第3章 結 論

S-L CAPM은 資產의 收益率差異를 體系的 危險으로 설명하고 있는데, 그 模型이 단순하며 쉽게 이용될 수 있는 장점이 있어서 70年代이후에 크게 각광을 받아왔다. 그러나 S-L CAPM은 도출에 이용되는 假定이 非現實的이며, 또 現實의 世界에 대한 說明이 미

28) 여기에서 APT를 이용한다는 것은, 實證結果의 分析시에 油價를 k-RGP上에서의 하나의 要因으로 해석할 수 있다는 의미이다. 물론 이러한 해석이 論理的 當爲性을 지니는 것은 아니다.

좁하다는 평가를 받고 있다. S－L CAPM의 현실적 가치가 의심을 받고 있는 가운데, Ross는 載定去來의 개념을 이용하여 資產價格決定의 논리를 설명하는 APT를 제시하였다. 이후 APT를 지지하는 學者들은 CAPM에 비하여 APT가 보다 우수한 資產價格決定模型이라는 평가를 하고 있다.

資產價格決定模型으로서 APT가 CAPM보다 우수하다고 評價받고 있는 근거로는 假定의 單純性·主張內容의 包括性·模型의 實證可能性·模型의 現實說明力등이 있다. 本 論文에서는 CAPM과 APT의 관계에 대한 이러한 일반적인 평가를 비판적으로 고찰하고, APT가 차지하는 意味를 규명하였다. APT를 評價하기 위하여 本 硏究는 APT의 假定과 主張內容을 CAPM과 비교하여 분석하였다.

第2章에서는 CAPM과 APT에 있어서 假定上의 差異點과 主張의 包括性 여부를 분석하였다. 模型의 도출에 필요한 假定을 비교할 때 APT의 假定이 CAPM의 假定보다 덜 制約的이라는 評價는 타당하지 않다고 보여진다. 資產價格決定模型이 規範的 意味가 아니라 實證的 意味를 지니기 위해서는, 個別資產의 固有危險이 價格決定에 영향을 미치지 말아야 한다. CAPM假定과 APT假定의 가장 근본적인 차이는 어떤 방법으로 固有危險의 假定 영향을 소거시키느냐에 있다.

CAPM은 多變量正規分布의 가정을 이용하여 市場포오트폴리오에 固有危險이 존재하지 못하도록 한다. APT는 資產이 많이 존재하는 大規模經濟일 것과 收益率이 여러개의 共通要因에 의하여 生成된다는 가정을 이용하여서 固有危險이 없는 載定포오트폴리오가 구성가능하게 한다. 大規模經濟와 k－RGP의 가정은 多變量正規分布의 가정보다 制約力이 弱한 假定이다. 그러나 이들만으로는 等式의 APT가 成立하지 않는다. 等式의 APT가 성립하기 위해서는 完全分散投資되어 固有危險이 없는 포오트폴리오가 적어도 하나 존재하여야 한다.

模型의 도출에 필요한 假定의 差異에 대한 기존의 分析들을 보면, 多變量正規分布와 k－RGP를 비교하고서 k－RGP가 보다 일반적인 分布를 나타내므로 APT의 假定이 덜 制約的이라고 評價하고 있다. 그러나 이러한 評價는 APT에서 k－RGP가 차지하는 역할에 대한 잘못된 인식에서 비롯된 것으로 보인다. APT의 도출에 진정으로 필요한 假定은 k－RGP가 아니라 적어도 하나의 完全分散投資된 포오트폴리오가 존재해야 한다는 것이다. k－RGP는 이 完全分散投資된 포오트폴리오와 연관하여 인식되는 危險을 다수의 要素로 분해하여 표현하는데 이용되는 統計的 수단일 뿐이다. CAPM의 多變量正規分布假定은 APT의 完全分散投資된 포오트폴리오假定과 비교되어야 한다.

資產의 收益率들이 多變量正規分布를 하면 分布의 數學的 特性에 의하여 市場포오트폴리오의 固有危險은 0이 된다. 이때 모든 投資者들은 危險資產중에서는 市場포오트폴리오

만을 소유하므로, 個別資產의 危險중에서 市場포오트폴리오의 危險과 관계가 없는 固有危險은 價格決定에 영향을 미치지 않게 된다. CAPM이 이처럼 分布의 數學的 特性을 이용하는 반면에, APT는 固有危險이 없는 完全分散投資된 포오트폴리오가 적어도 하나 존재한다고 직접 가정하는 방법을 이용한다. 어떻게 해서 個別資產의 固有危險이 가격결정에 영향을 미치지 않게 되는가 하는 질문에 대하여 CAPM은 多變量正規分布의 數學的 特性을 그 근거로 제시할 수 있지만, APT는 근거를 제시할 수 없다. 흔히 資產이 많이 존재하는 大規模經濟에서의 分散投資效果를 근거로 제시하지만, 이 경우에 도출되는 模型은 等式의 APT가 아니라 制約式의 APT라는 문제점이 있다. 그러나 投資者들의 投資決定行動을 설명하는데 있어서는 APT가 CAPM보다 설득력이 있다. CAPM에서는 投資者들이 受益率分布의 平均과 分散만을 고려하여 投資決定을 한다고 보는데, 실제의 收益率分布는 正規分布가 아니며 또 投資決定이 平均과 分散만으로 이루어진다는 것도 현실성이 적다고 하겠다. 반면에 APT에서는 投資者들이 載定去來收益을 획득하기 위하여 경쟁적으로 노력한다는 보다 直觀的인 개념으로 投資決定行動을 설명하고 있는 것이다.

模型의 表現形態를 보고서, CAPM은 APT의 部分理論이므로 APT가 보다 일반적인 資產價格決定規模이라고 판단하는 것은 잘못으로 보인다. CAPM에서는 資產의 價格이 市場포오트폴리오와의 共分散에 의하여 결정되며, APT에서는 여러 개의 共通要因과의共分散에 의하여 결정된다. APT가 CAPM보다 일반적인 資產價格決定模型이라고 보는 주장들은 APT가 CAPM보다 많은 數의 危險源泉을 고려하고 있다는 점과, CAPM은 1-RGP일 때 나타나는 특수한 경우의 APT라는 점을 근거로 들고 있다. 그러나 이러한 評價는 CAPM과 APT의 實質的 內容을 보지 않고 외견상의 表現形態에만 집착하였기 때문에 나타난 것이다. 두 理論간의 일반성여부를 판단하기 위해서는 理論의 實質的 內容에 대한 포함관계여부를 밝혀야 한다. 어느 한 理論이 다른 理論에 완전히 포함되어야 일반성 여부가 판단된다.

CAPM과 APT의 實質的 內容을 비교해 보면, 한 理論이 다른 理論을 포함하는것이 아니라 서로 同等한 水準에 있는 理論이다. 만일 市場포오트폴리오 收益率의 움직임이 다수의 共通要因의 움직임으로 설명될 수 있다면, multi-β型으로 확장시킨 CAPM은 APT와 같은 형태가 된다. 또 만일 APT에서 상정하고 있는 다수의 共通要因들이 多變量正規分布를 이룬다면, 이 要因들이 CAPM에 따라서 價格決定되어서 APT는 CAPM과 같은 형태가 된다.

參　考　文　獻

1. 國內書籍

1. 金正年,「統計學」, 서울 : 經文社, 1979,
2. 朴聖炫,「回歸分析」, 서울 : 大英社, 1981,
3. 朴廷寔,「現代投資論」, 서울 : 茶山出版社, 1981,
4. 沈昞求, 李正 ,「證券投資論」, 서울 : 博英社, 1981,
5. 尹桂燮,「韓國證券市場分析論」, 서울 : 法文社, 1982,

2. 國內論文

1. 朴廷寔, "資本資產價格決定模型의 理論 : 理論의 展開 및 擴張," 서울大學校 經營大學 經營硏究所,「經營論集」, 第17券 (1983. 3), pp.117-138.
2. 辛榮善, "載定價格決定理論에 關한 實證的硏究," 서울大學校 大學院 碩士學位論文, 1985. 12.
3. 吳承一, "載定去來價格決定理論의 實證硏究分野에 대한 批判的 考察," 서울大學校 大學院 碩士學位論文, 1985. 12.
4. 柳寅順, "載定價格決定模型에 관한 實證的 硏究," 高麗大學校 大學院 博士學位論文,
5. 尹周植, "載定價格決定理論에 關한 實證的 硏究," 서울大學校 大學院 碩士學位論文, 1984. 12.
6. 李廷彩, "載定價格決定理論에 對한 實證的 硏究 : Firm Size效果를 中心으로," 서울大學校 大學院 碩士學位論文, 1985. 12.
7. 李弼商외 6人, "載定價格決定模型의 理論的 考察과 實證的 分析,"「證券學會誌」, 第6輯 (1984) pp. 1-29.
8. 丁晟昌, "載定價格決定理論에 關한 實證的 硏究," 서울大學校 大學院 碩士學位論文, 1984. 12.
9. 曺 淡, "不確實性下의 投資理論 - APT의 構造와 CAPM과의 比較," 全南大學校「經營論叢」, 第8輯 (1983. 12), pp. 57-73.

3. 外國書籍

Fama, E.F., *Foundations of Finance* (N.Y.: Basic Books, Inc., 1976).

Fogler, H. and Ganapathy, S., *Financial Econometrics* (New Jersey: Prentice-Hall, 1981).

Griliches, Z. and Intriligator, M.D., *Handbook of Econometrics*, Vol. 2 (N.Y.: North-Holland, 1983).

Ingersoll, J.E. Jr., *Theory of Financial Decision Making* (New Jersey: Roman & Littlefield, 1987).

Jensen, M.C. ed., *Studies in the Theory of Capital Markets* (N.Y.: Praeger, 1972).

Johnson, R. and Wichern, D., *Applied Multivariate Statistical Analysis* (New Jersey : Prentice-Hall, 1982).

Kim, Jae-On., Muller, C.W., *Introduction to Factor Analysis*, Series: Quantitative Applications in the Social Science, Vol.13(Beverly Hills : SAGE, 1982).

Sharpe, W.F., *Investments*, 3rd ed. (New Jersey: Prentice-Hall, 1985).

4. 外國論文

Beja, A., "On Systematic and Unsystematic Components of Financial Risk," *Journal of Finance* (Jan. 1972), pp.37-45.

Cass, D. and Stiglitz, J., "The Structure of Investor Preference and Asset Returns, and Separability in Portfolio Selection : A Contribution to the Pure Theory of Mutual Funds," *Journal of Economic Theory* 2 (1970), pp.122-160.

Chen, N.F. and Ingersoll, J.E. Jr., "Exact Pricing in Linear Factor Models with Finitely Many Assets : A Note," *Journal of Finance* (June 1983), pp.985-988.

Dybvig, P.H., and Ross, S.A., "Yes, The APT is Testable," *Journal of Finance* (Sept. 1985), pp.1173-1187.

Fama, E.F., "Rick, Return and Equilibrium : Some Clarifying Comments," *Journal of Finance* (March 1968), pp.29-40.

Fama, E.F., "A Note on the Market Model and the Two-Parametor Model," *Journal of Finance* (Dec. 1973), pp.1181-85.

Huberman, G., "A Simple Approach to Arbitrage Pricing Theory," *Journal of Economic Theory* (Oct. 1982), pp.183-191.

Kraus, A. and Litzenberger, R.H., "Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets," *Journal of Finance* (Sept. 1976), pp.1085-1100.

Roll, R. and Ross, S., "An Emprical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory," *Journal of Finance* (Dec. 1980), pp.1073-1104.

Ross, S.A., "Mutual Fund Separation in Financial Theory - The Separating Distributions," *Journal of Economic Theory* 17 (1978), pp. 254-286.

Ross, S.A., "The Current Status of the Capital Asset Pricing Model," *Journal of Finance* (June 1978), pp.885-901.

Rubinstein, M., "The Valuation of Uncertain Income Streams and Pricing of Options," *The Bell Journal of Economics* (Autumn 1976), pp.407-425.

Shanken, J., "The Arbitrage Pricing Model : Is It Testable?" *Journal of Finance* (Dec. 1982), pp.1129-1140.

Shanken, J., "Multi-Beta CAPM or Equilibrium-APT? : A Reply," *Journal of Finance* (Sept. 1985), pp.1189-1196.

Sharpe, W.F., "A Simplifield Model for Portfolio Analysis," *Management Science* (Jan. 1963), pp.277-293.

Stapleton, R.C. ed., "Arbitrage Picing Theory : The Way Forward ?" New York Univ., Working Paper (Oct. 1985).

Stapleton, R.C. and Subrahmanyam, M.G. "The Market Model and Capital Asset Pricing Theory : A Note," *Journal of Finance* (Dec. 1983), pp.1637-42.

Subrahmanyam, M., "Notes on the APT and its Empirical Implications," in Stapletion, R.C. ed., "Arbitrage Pricing Theory : The Way Forward?" New York Univ., Working Paper (Oct. 1985), pp.19-23.