經營學硏究 第17卷 第2號(1988年 5月)

# 租稅를 고려한 資本資産의 價格決定을 위한 異時的 模型*

## ——An Intertemporal Capital Asset Pricing Model with Taxes——

이 일 균**

≪目 次≫



## Ⅰ. 序 論

不確實性下에서 資本資産의 價格을 결정하는 理論은 單一期間의 觀點에서는 비교적 잘 개발되었다. 收益이 正規分布를 구성하고 投資者의 效用函數를 期待收益과 分散으로 표시할 수 있는 경우에는 샤프(1964), 린트너(1965) 및 모신(1966)의 資本資産의 價格決定模型을 얻는데, 이 모형은 資本資産의 收益들 사이의 理論的 均衡關係를 정립한 획기적 모형이다. 이 模型에 대한 實證的 分析에 의하면 資産의 均衡收益率은 體系的 危險과 線型關係를 갖으며, 체계적 위험만으로 결정되지만, 실제의 수익과 체계적 위험은 이 모형이 예측한 것과 동일한 關係를 갖지는 않는다고 한다.[1]

이와같은 現實과 理論의 不一致는 資本資産의 價格決定模型이 靜態的 單一期間模型이므로 이 모형에서 고려되지 않은 변수들로 인하여 발생한 것이라고 생각하게 되었고, 그 중 가장 중요한 것이 租稅라고 보았다. 브레넌 (1973)과 리첸버거와 라마스와미(1979)는 一般所得稅와 資本利得稅가 상이하다는 가정하에서 이 모형을 발전시켜 租稅模型을 개발하였다. 이 모형에서는 資本資産의 納稅前收益率이 체계적 위험과 배당률의 1次函數의 관계를 갖는다. 리첸버거와 라마

* 이 論文은 文敎部의 學術助成費의 연구자금에 의하여 연구되었음. 이에 謝意를 표하는 바임. 연구에 도움을 준 文基漢君과 원고 정리에 노고가 많은 高榮敦君 및 權榮基君에게 사의를 표함.
**명지대학교 경영학과 교수
† 學會原稿接受日 1月 22日
1) 예컨데, Black, Jensen and Scholes (1972), Jensen(1972), Fama and MacBeth (1973), Cheng and Grauer (1980), Gibbons (1982)를 참고하라.

스와미(1979, 1982)는 이 조세모형을 실증적으로 연구하여 配當率變數의 係數의 符號가 陽이고 1보다는 적고 0보다는 크다는 점을 밝혔다. 그러나 밀러와 숄즈(1982)는 실증분석의 결과 배당률변수의 계수가 0이라고 주장한다. 그들의 검증법을 구체적으로 살펴보자.

리첸버거와 라마스와미(1979)는 橫斷面回歸方定式의 推定에 配當의 값을 다음과 같이 정의하여 사용하였다. 즉, 證券 $i$에 대하여 $t$月에 配當이 지급되지 않으면 dit=0, 配當을 $(t-1)$에 발표하고 $t$月에 지급하면 dit=Dit/pit-1, 配當의 發表와 支給이 같은 달에 행해지면 그 이전의(1年前까지 소급) 定期配當(regular dividend) $\widehat{\mathrm{D}}$it를 사용하여 dit=$\widehat{\mathrm{D}}$it/pit-1를 계산하여 사용하고, 소급해서 정규배당을 찾을 수 없는 경우 dit=0으로 하였다. 그들이 배당변수를 이와같이 계산한 것은 租稅效果와 情報效果를 분리하기 위한 것이다. 이 회귀분석에서 配當의 係數는 統計的으로 有意하고 經濟的으로도 意味가 있다.

밀러와 숄즈(1982)는 리첸버거와 라마스와미가 配當을 정기적으로 지급하는 기업이 定期的配當支給月에 配當을 지급하지 않는 경우 dit=0으로 처리하여 配當省略에 대한 情報를 무시하게 되어 배당변수의 係數가 上向編奇로 추정된다고 주장한다. 이것은 정확한 관찰이다.

밀러와 숄즈는 이와같은 過誤를 시정하기 위하여 (1) $(t-1)$月에 공표하고 $t$月에 지급한 配當은 dit, 그 이외에는 dit=0로 하는 경우, (2) 同月에 公表와 支給이 동시에 이루어진 株式은 (1)에서 제거하고 표본을 구성한 경우, (3) $(t-1)$月에 공표하고 $t$月에 지급한 配當만을 표본으로 하는 경우, (4) dummy variable을 도입하여 同月에 공표와 지급이 이루어진 배당은 1, 기타는 0으로 하는 경우로 나누어 고찰하였다. 그런데 이 모든 경우 配當의 係數는 統計的으로 有意하지 않고 經濟的으로도 거의 意味가 없다. 따라서 配當率效果는 전적으로 情報效果에 기인한다는 것이다.

리첸버거와 라마스와미(1982)는 밀러와 숄즈의 도전을 받고서 (1) 자료에 의하여 예측한 配當 (2) $(t-1)$에 공포하고 $t$에 지급한 配當은 dit, (t-1)에 배당이 지급된 경우에는 dit=0으로 한 표본을 구성하여 검증한 결과, 配當係數는 有意水準이 존재하고 경제적으로도 의미가 있음을 발견하였다.

밀러와 숄즈는 株式의 收益率과 配當은 관계가 없고 配當이 갖는 情報가 수익률에 영향을 미친다고 주장하는 반면, 리첸버거와 라마스와미는 配當이 株價에 영향을 미친다는 주장이다. 밀러와 숄즈는 특히 情報의 效果를 추출하기 위한 탁월한 方法에서, 리첸버거와 라마스와미는 計量經濟學에서 발생하는 문제를 해결하기 위한 엄밀한 추진방법에서 큰 공헌을 하였다. 그럼에도 불구하고 표본에서 데이타를 삭제하여 標本이 제공하는 情報를 모두 사용하지 못하여 回歸分析에서 編奇性을 갖게 되었다. 한 예로 配當의 情報效果를 제거하기 위하여 배당의 공포와 지급이 같은 月에 이루어진 경우에는 과거의 定期配當을 사용 하였는데, 이것은 린트너 (1956)의 결과를 인정한다해도 정당화될 수 없다. 과거의 정기 배당과 $t$月의 정기 배당은 서로 상이할 수가 없다. 왜냐하면 린트너에 의하면 배당구조는 배당을 목표율에 적응시켜 나가는 동태구조

이기 때문이다. 따라서 同月에 배당의 공포와 지급이 이루어진 경우 그 배당이 항구적으로 증가한 것인지, 또는 감소한 것인지를 판별한 후 정보효과를 제거하기 위한 방법을 강구하여야 정확한 검증이 가능할 것이다. 리첸버거 및 라마스와미와 밀러 및 숄즈의 相異한 結果는 配當의 情報效果의 정확한 分離의 失敗에서 기인한 것도 원인이지만 配當의 效果가 稅金만의 현상이 아니며, 資本市場에서 연속적으로 거래가 이루어 지는데 이 점을 고려치 않아서 모형의 정립이 불완전하게 된데서 기인한 것으로도 추론된다.

샤프, 린트너 및 모신의 模型에 대한 결점을 보완하기 위한 다른 처방으로서 投資機會의 異時的 不安全性과 變動(intertemporal fluctuations)을 도입하는 방법이 있다. 머튼(1973)은 자본시장에서의 연속적 거래를 고려하여 연속시간의 상황에서 資本資產의 異時的 價格決定模型을 도출하였다. 投資機會가 確率的일 때, 머튼의 異時的 模型은 資產의 期待收益이 多베타의 函數이며, 이 때 베타의 個數는 투자기회집합의 특성을 기술하는 狀態變數(State variables)의 個數에 1을 더한 것이다. 브리든 (1979)은 머튼의 模型을 발전시켜 消費베타模型을 개발하였다. 머튼과 브리든은 그들의 모형에 세금을 도입하지 않았다. 콘스탄티니데스(1983)는 個人稅가 資本資產의 價格의 形成에 미치는 효과를 중심으로 資本市場의 均衡을 분석하였으나 租稅模型은 도출하지는 않았다.

이 論文은 一般所得稅와 資本利得稅가 상이하고 確率的 投資機會集合이 존재하는 狀況과 連續時間의 觀點에서 資本資產의 異時的 價格決定模型을 정립하는데 그 목적이 있다. 資本資產의 評價와 企業의 價値決定에 중요한 要素인 個人稅를 도입하여 머튼과 브리든의 分析을 확대, 발전시켜, 異時的 租稅模型을 정립하고자 한다. 앞에서 언급한 바와 같이, 投資機會의 異時的 變動 및 不安全性과 稅金은 다같이 資本資產의 價格決定에 중요한 영향을 미치는 變數인데, 정태적 단일기간 모형에서는 고려되어 있지 않다. 정태적 단일기간 모형이 資產의 期待收益간의 均衡關係를 완벽하게 설명하지 못하고 있는 실정이므로 이 두 要素를 도입하여 정립된 모형은 資本市場의 行動을 보다 적절히 설명해 주고, 實證分析에서 지적된 모순을 해결해 줄 것이라고 생각된다.

여기에서 개발될 모형은 相異한 稅率下에서 資本資產의 價格決定의 過程을 제시해 줄 것이다. 資本市場이 연속적으로 운행하고 있어 資產이 연속적으로 거래되고 있는 만큼, 投資者는 포트폴리오를 순간적으로 변경시킬 수 있으며, 이 때 투자자는 포트폴리오의 변경에 租稅效果를 즉각적으로 반영할 수 있다. 여기에서 개발된 모형에 의하면, 配當變數의 係數는 陽數이고 0이 아니다. 危險水準이 주어지면, 投資者는 配當率이 증가할 때 높은 收益을 요구한다. 이것은 配當稅率이 資本利得稅보다 높기 때문이다. 이 논문에서는 모딜리아니와 밀러(1958, 1961, 1963)의 租稅定理와 配當의 無關性定理가 성립하고, 밀러(1977)의 稅金無關性의 定理는 일반적으로 성립하지 않음이 증명된다. 그러나 각 資產의 配當率이 市場配當率과 동일할 경우에 한하여 밀러의 定理가 성립한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2 절에서 모델 經濟를 기술한다. 특히 富의 增加過程과 資産의 收益에 대한 確率過程을 논의한다. 제 4 절에서는 相異한 租稅構造와 確率的 投資集合이 존재하는 狀況下에서 資本資産의 價格을 결정하는 根本的 偏微分方程式을 이용하여 投資機會가 安定的일 때의 異時的 租稅模型을 정립한다. 제 5 절에서는 投資機會가 確率的(Stochastic)일 때의 異時的 租稅模型을 정립한다. 제 6 절에서는 브리든의 消費베타模型을 발전시켜, 消費베타 租稅模型을 도출한다. 제 7 장에서 結論을 제시한다.

## II. 모델經濟의 記述

우리의 經濟는 單一製品을 $n$ 個의 生產單位가 생산하는 效換經濟로서 稅金이 부과되는 危險性資産과 無危險性資産이 자본시장에서 거래된다. 投資家는 配當과 資本利得에 대하여 個人稅를 납부한다. 資本市場의 構造는 다음과 같다.

1. 投資者는 폰 노이만 · 모겐스턴 效用函數의 極大化를 추구하며, 이 효용함수는 消費의 單調增加, 强오목函數이다.

2. 投資者는 모두 資本資産의 收益率을 댓가를 지불하지 않고 관찰할 수 있다. 즉 투자자는 同質的 期待(homogeneous expectations)를 갖는다.

3. 去來費用은 존재하지 않고, 모든 資産은 無限의 可分性(infinite divisibility)을 보유하며, 有限債任을 내포한다.

4. 投資者는 市場에 비해 소규모이어서 자산의 총수요량이나 총공급량에 인지할 수 있는 영향을 미치지 못한다. 따라서 투자자는 價格을 여건으로 수용한다.

5. 裁定(arbitrage)의 機會가 존재하지 않아 不均衡狀態에서는 거래가 형성되지 않는다. 즉, 資本市場은 언제나 균형을 이룬다.

6. 空賣(short sales)가 존재하며 공매에 의한 자금은 투자자가 모두 사용한다.

7. 모든 投資家는 同一한 無危險率로 자금을 무한정 조달할 수 있고 투자할 수 있다.

8. 一般所得稅와 資本利得稅는 상이하고, 누진세의 구조를 갖는다.

9. 資本資産은 연속적으로 거래가 형성된다.

위에서 가정 1은 投資者의 選好가 納稅後의 期末의 富에 의존하는 消費의 集合에 대하여 정의가 되며, 투자자는 期待收益을 선호하고 수익의 분산은 기피하는 성향을 갖는다는 것이다. 그리고 2~7은 전통적인 資本資産의 價格決定模型에서 사용한 가정이다. 이것은 資本市場이 완전하고 경쟁적이라는 의미이다. 가정 3, 5와 9는 투자자가 포트폴리오를 언제나 변경시킬 수 있다는 것을 뜻한다.

資本市場의 構造가 정립되었으니, 이 市場에서 활동하는 資本資産의 收益率을 살펴보자. 資

本資產 $i$ 의 순간적 수익률은 다음의 이토確率過程(Itô process)을 따른다.

$$\frac{dp_i}{p_i} = (\alpha_i - \delta_i)dt + \sigma_i dz_i \tag{1}$$

위에서, $p_i$=資本資產 $i$ 의 단위시간당 1株의 價格, $\alpha_i$=단위시간당 資產 $i$ 의 순간적 총수익률, $\delta_i$=資產 $i$ 에 대하여 받은 순간적 總收入額率(instantaneous total rate of payout received), $\sigma_i^2$=收益의 瞬間的 分散率, $dz_i$=위너過程(Wiener process)[2]으로서 平均이 0, 分散이 1이다. 式 (1)은 이토過程(Itô process)이다.[3] 이 過程은 連續時間 마코브過程의 특별한 形態로서 후앙(1987)은 資本資產에 대한 狀態變數들의 動態性을 이토過程으로 표시할 수 있다는 것을 증명한 바 있다.

資本資產의 순간적 收益과 分散은 狀態變數(state variables)에 의존할 수 있다. 말하자면 수익과 분산이 投資機會의 時間的 變化의 動態性에 의존한다는 것이다. 이경우 순간적 수익률과 분산은 다음과 같이 確率的 微分方程式에 의하여 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} d(\alpha_i - \delta_i) &= y_i dt + f_i d\xi_i \\ d\sigma_i &= \mu_i dt + \phi_i d\pi_i \end{aligned} \tag{2}$$

위에서 $y_i$ 와 $\mu_i$ 는 drift이고, $f_i$ 와 $\phi_i$ 는 diffusion 係數이며, $d\xi_i$ 와 $d\pi_i$ 는 위너 過程이다.

## Ⅲ. 根本的 均衡評價模型

각 個別投資家는 時間加算的이고 狀態變數와는 獨立的인, 平生의 消費에 대한 폰 노이만·모

2) 위너 過程 $\{Z(t)\}$는 確率空間$(\Omega, F, P)$에서 정의된 確率過程으로 다음과 같은 특성을 갖는다.
(1) 이 過程은 時間 0에서 출발한다. 즉 $Z(o)\ (w)=0.\ a.S.$
(2) 이 過程의 增分 $Z(t)-Z(s)$는 獨立的 確率變數이다. 즉
$P[Z(t_i)-Z(t_{i-1})\in\phi_i \text{ for } i\leqq n]=\prod_{i\leq N} P[Z(t_i)-Z(t_{i-1})\in\phi_i]$
(3) 增分 $Z(t)-Z(s,\ t>s$ 는 정규분포를 구성하며 平均은 0, 分散은 $(t-s)$이다.
(4) 각 $w\in\Omega$ 에 대하여 $Z(t)(w)$는 $t(t\geqq 0)$의 연속함수 이다.

3. 이토 確率過程(Itô stochastic processes)은 다음과 같이 정의된다. $X(t)$를 다음의 確率微分方程式을 만족시키는 $n$ 次元 確率過이이라 하자.
$$dx(t)=\alpha(x,t)+\sigma(x,t)\ dz(t) \tag{i}$$
위에서 $\alpha(x,t)$는 $(n\times 1)$ 벡터 函數이고 $\sigma(x,t)$는 $(n\times m)$ 行列函數이며 $Z(t)$는 $m$ 次元 위너 過程이다. 즉 函數
$\alpha(x,t) : R^n\times T\rightarrow R^n$
$\sigma(x,t) : R^n\times T\rightarrow R^{n\times n}$
는 주어진 函數이고 $x$ 와 $t$ 의 연속함수이며 다음의 조건을 만족시킨다.
(i) (成長條件) 다음의 관계를 성립시키는 $k_1$ 가 존재한다.
$|\alpha(x,t)|^2\leqq k_1^2(1+|x|^2)$
$|\sigma(x,t)|^2\leqq k_2^2(1+|x|^2)$
(ii) (립쉬츠條件) 다음을 유지하는 $k_2$ 가 존재한다.
$|\alpha(x,t)-\alpha(\bar{x},t)|\leqq \bar{x}_2\ |x-\bar{x}|$
$|\sigma(x,t-\sigma(\bar{x},t)|\leqq \widehat{k_2}|\bar{x}-x|$

겐스턴 效用函數의 期待값을 각 순간마다 極大化시키고저 한다. 즉,

$$\text{Max } E_0\left\{\int_0^{K} U^k[C^k(s),\ s]ds+B^k[w^k(T^k),\ T^k]\right\} \tag{3}$$

위에서 $E_0$은 時間 0에선 이용가능한 모든 情報를 조건으로한 條件附期待값을 표시하고, $T^k$는 投資者 $k$의 生과 死의 分布이다. $U^k$는 效用函數로서 强增加, 强오목이고 두번 미분 가능하다. $C^k(s)$는 $S$歲의 순간적 소비, $B^k$는 强오목형의 遺產函數(beguest function)이고, $W^k(0)=W^k$로서 投資家의 富를 표상한다.

投資者는 一生의 效用을 극대화 할 수 있도록 期初의 富를 $(n+1)$個의 資本資產과 消費에 배분하여 투자활동과 소비활동을 전개한다. 부호의 복잡성을 제거하기 위하여 時間에 대한 添字를 사용하지 않고, 富의 움직임을 정립하면 다음과 같다.[4]

$$\begin{aligned} dw=&\left[\sum_1^n a_i(\alpha_i-\delta_i-r)+r\right]\mathrm{wdt}+\left[\sum_1^n a_i\delta_i\right]\mathrm{wdt}\\ &+\sum_1^n a_i w\sigma_i dz_i+(Y-C)dt \end{aligned} \tag{4}$$

위에서 $a_i$=資本資產 $i$에 투자한 富의 比率, $Y$=賃金, $r$=無危險資產의 순간적 收益率이다. 式(4)는 세금이 존재하지 않을 때의 富의 動態性(wealth dynamics) 즉, 富의 時間的 變化이다. 그러나 一般所得稅와 資本利得稅가 존재하면, 富의 動態的 變化는 위와는 다른 형태를 취하게 된다. 投資者의 所得이 配當과 資本利得만으로 구성되고, 賃金은 없다고 가정하고 富의 動態的 變化를 정립해 보자.[5] 配當과 利子는 一般所得稅의 대상이 된다고 가정하고, 資本所得稅를 $\lambda$, 一般個人所得稅를 $\gamma$라 하면, 納稅後의 富의 變化는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} dw=&(1-\lambda)\sum_1^n a_i(\alpha_i-\delta_i)\ \mathrm{wdt}+(1-\lambda)\sum_1^n a_i w\sigma_i dz_i\\ &+(1-\gamma)\left[\sum_1^n a_i(\delta_i-r)+r\right]\mathrm{wdt}-\mathrm{cdt}. \end{aligned} \tag{5}$$

부호를 간편하게 하기 위하여 狀態變數를 벡터 $x$로 표시하자. $x$는 $m$個의 元으로 구성되어 있으며 각 元은 $p, \alpha$ 및 $\sigma$의 現水準을 표시한다. 그리고 $x$는 다음의 벡터이토 過程을 따른다.

$$dx=G(x)dt+H(x)dQ \tag{6}$$

위에서 $G=(g_1,\ g_2,\cdots\cdots,g_m)'$, $H$는 對角線行列로서 對角線의 元은$(h_1,\ h_2,\cdots\cdots,h_m)$, 그리고

위의 (i)의 解는 다음의 이토積分方程式을 만족시키는 $n$次元過程이다.

$$x(t)=x(0)+\int_0^t \alpha(x(s),s)ds+\int_0^t \sigma(x(s),s)\ dz(s) \qquad \text{(ii)}$$

아놀드 (1974 定理 9.3.1)는 (Ⅱ)의 $x$가 적분방정식의 唯一한 解이며 解 $x(t)$는 $n$次元 diffusion process로서 drift Vector가 $\alpha$이고 diffusion matrix가 $\sigma$임을 증명하였다. drift vector $\alpha$는 $x$의 期待變化率이고 diffusion matrix $\sigma\sigma'$은 $x$의 期待變化率의 共分散行列이다.

4) 예산방정식의 형태에 대한 구체적인 설명은 머튼 (1971, 1973)을 참조하라.

$dQ$는 위너過程으로서 $(dq_1, dq_2, \cdots\cdots, dq_m)'$이다. 여기에서 $dz_i$와 $dq_j$의 순간적 相關係數를 $\theta_{ij}$, 그리고 $dq_i$와 $dq_j$의 순간적 상관 계수를 $V_{ij}$라 하자.

富의 動態的 變化와 狀態變數들의 dynamics에 대한 過程이 정의되었으므로, 最適化를 위한 必要充分條件은 確率的 動態計劃法(stochastic dynamic programming)의 技法을 사용하여 도출할 수 있다.

富의 誘導效用函數를 다음과 같이 정의하자.

$$J(w,t,x)=\text{Max}\quad E_t\left\{\int_t^T U[c(s),\ s]ds\right\} \tag{7}$$

위에서 $U: R^+ \to R^+$는 연속적으로 미분가능하고, 有界이며, 單調增加하고 强오목이며 $U(0)=0$이다. 式 (7)의 效用函數를 극대화시키고자 하는 投資家에게 있어서는 最適條件은 아래의 벨만式(Bellman equation)이다.

$$\begin{aligned}0=\underset{(c,a)}{\text{Max}}\Big[&U(c,t)+J_t+J_w\Big[(1-\lambda)\sum_1^n a_i(\alpha_i-\delta_i)w-c\\&+(1-r)\Big\{\sum_1^n a_i(\delta_i-r)+r\Big\}w\Big]+\sum_1^m J_i g_i\\&+\frac{1}{2}Jww\sum_1^n\sum_1^n(1-\lambda)^2\,a_i a_j\sigma_{ij}w^2+\sum_1^m\sum_1^n Jiw(1-\lambda)\\&a_i w h_i\sigma_j\theta_{ij}+\frac{1}{2}\sum_1^m\sum_1^m J_{ij}h_i h_j v_{ij}\end{aligned} \tag{8}$$

위에서 制約條件은 $J(w,x,t)=B(w,T)$이다. 그리고 富의 誘導效用函數 $J$의 添字는 편미분을 표상한다. $\sigma_{ij}=\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$는 資産 $i$와 $j$의 수익간의 순간적 共分散이다. 式 (8)은 資本資産의 需要函數, 즉 포트폴리오의 選定模型이며 동시에 價格決定模型이다. 포트폴리오의 價値는 式 (8)과 境界條件(boundary conditions)에 의하여 결정된다. 그러나 이 偏微分方程式은 closed-form solution이 없는 경우가 있는데, 이 때에는 實價的(numerically)으로 풀어 解를 구할 수 있다.[6)]

式 (8)의 右項에서 첫째 및 둘째 項을 제외한 모든 右邊項을 $L(t)\ J$라고 정의하자, 이것은 딘킨演算子(Dynkin operator)이다. 이 때 $C(t)$를 admissible feedback control $V(t)$로 대체한다. 그러면 式 (8)은 다음과 같이 간단히 표시할 수 있다.

$$0=\underset{\{v(t)\}}{\text{Max}}[U(v(t),t)+J_t+L(t)J] \tag{9}$$

다음과 같이 정의하자

5) 머튼(1973) 이 지적한 바와 같이, 임금을 제외하면 포트폴리오와 소비결정에 체계적 영향을 미칠 것이다.
6) 이 方法에 대하여는 Brennan and Schwartz(1978)과 Geske and Shastri(1985)를 참조하라.

$$F(k(t), w(t), x(t), t) = \underset{\{k(t)\}}{\mathrm{Max}}\left[\int_t^T U(k(s), s)ds\right], \tag{10}$$

위에서 $k(t)$는 admissable feedback control이다. 그러면 벨먼 式은 다음과 같이 된다.

$$0 = \underset{\{k(t)\}}{\mathrm{Max}}[U(k(t), t) + Ft + L(t)F], \tag{11}$$

위에서 $L(t)F$는 $F$의 딘킨演算子이다. 다음의 補助定理에 의하여 feedback optimal control이 제공된다.[7)]

〈補助定理 1〉 $J(t, w, x)$가 다음의 벨먼式의 解라 하자.

$$0 = \underset{\{v \in V\}}{\mathrm{Max}}[L(t)J + U(t, x, v)] + Jt$$
$$\text{for}(t, w, x) \in \Psi \equiv [0, T] \times (0, \infty) \times R^n$$

여기에서 境界條件(boundary conditions)은 다음과 같다.

$$J(t, 0, x) = E_t\int_t^T U(0, s)ds,$$
$$J(T, W, X) = 0$$

위에서 $J(t, w, x)$는 $t$에 대하여 연속적으로 미분 가능하고, $w$와 $x$에 대하여 두번 연속 미분가능하고, $\psi$의 closure에서 연속적이며, polynomial growth condition, 즉 常數 $k_1$과 $k_2$에 대하여 $|J(t, w, x)| \leqq k_1(1 + |w, x|^{k_2})$을 만족시킨다.

(i) 어떤 admissible feedback control $V$와 어떤 最初條件 $(w, x) \in \psi$에 대하여 $J(t, w, x) \geqq F(t, w, x, v)$이다.

(ii) $V^*$가 모든 $(t, w, x) \in \psi$에 대하여

$$L(t)J + U(v^*, x, t) = \underset{v \in V}{\mathrm{Max}}[L(t)J + U(v, x, t)]$$

를 만족시키는 admissible feedback control이면, 모든 $(w, x, t) \in \psi$에 대하여

$$J(w, x, t) = F(v^*, w, x, t)$$

즉 $V^*$가 最適이다.

〈證明〉 플레밍과 리셀(1975, p. 159)을 보아라.

위의 補助定理는 $0 = \mathrm{Max}(c, a;\ w, x, t)$라는 의미이다. 이 보조정리에 의하여 위의 벨먼式의 解를 구할 수 있다. 따라서 式 (8)에 대한 最適化條件은 다음과 같다.

$$0 = U_c(c, t) - J_w(w, x, t)\ ; \tag{12}$$

7) 確率的 動態計劃法과 最適制御에 대하여는 Kushner (1969, Ⅳ章)을 참조하라.

$$0=J_w[(1-\lambda)(\alpha_i-\delta_i)+(1-r)(\delta_i-r)] \tag{13}$$
$$+J_{ww}\left[\sum_1^n(1-\lambda)^2 a_j\sigma_{ij}w\right]+\sum_1^m J_{jw}(1-\lambda(h_j\sigma_i\theta_{ji}(i=1,2,\cdots,n)$$

式 (12)는 現在消費의 限界效用을 未來消費를 위한 富의 誘導限界效用과 일치시키는 異時的 envelope 條件(intertemporal envelope condition)이다. 式 (13)은 포트폴리오의 選定規則이다. 逆行列을 이용하여 式 (13)을 풀면

$$a_jw=A[(1-\lambda)^{-1}\sum_1^n\eta_{ij}(\alpha_j-\delta_j)+(1-r)(1-\lambda)^{-2}\sum_1^n\eta_{ij}(\delta_j-r)]$$
$$+(1-\lambda)^{-1}\sum_1^m\sum_1^n B_k\sigma_jh_k\theta_{jk}\eta_{ij}(i=1,2,\cdots,n), \tag{14}$$

위에서 $A=-J_w/J_{ww}$ 이고 $B_k=-J_{kw}/J_{ww}$ 이다. $\eta_{ij}$ 는 收益의 순간적 共分散行列 $\Omega=[\sigma_{ij}]$의 逆行列의 元이다.

式 (14)에 의하여 포트폴리오의 決定에 대한 投資者의 行動을 통찰할 수 있다. 陰函數定理에 의하여

$$A=-\frac{Uc}{Ucc\dfrac{\partial c}{\partial w}}>0 \tag{15}$$

그리고

$$B_k=\frac{\partial c/\partial_{xk}}{\partial c/\partial w} \tag{16}$$

$B_k$ 의 부호는 未定이다. 式 (14)의 포트폴리오는 式 (15)와 (16)에 의하여 두개의 成分으로 구성되어 있음을 알 수 있다. 式 (14)의 右邊項의 첫 項은 單一期間 平均·分散效用을 극대화하는 투자자의 危險性 資產의 포트폴리오를 의미하며, $A$ 는 투자자의 絕對危險忌避係數의 逆, 즉 絕對危險許容(absolute risk tolerance)에 비례한다. 둘째 項은, 머튼 (1973)이 解釋한 바와 같이 投資機會集合의 불리한 變動에 대하여 헤지(hedge)를 하기 위한 수단으로서 資本資產을 需要함을 반영하고 있는 것이다.

稅金의 效果를 검토해 보자. 式 (14)의 첫째 네모괄호안의 첫째 項은 資本利得이 (1－資本利得稅)의 逆에 비례함을 보여주고, 둘째 項은 配當이 (1－所得稅)와 (1－資本利得稅)의 제곱의

8) 이토補助定理(Itô's lemma)는 확률변수에 대한 미분규칙이다. 確率微分方程式이 다음과 같다.

$$dx=\alpha(x,t)dt+\sigma(x,t)dz$$

이때 $w(t,x)$는 다음의 確率的微分方程式을 만족시킨다.

$$dw=\frac{\delta w}{\delta t}dt+\sum_1^n\frac{\delta w}{\delta x_i}dx+\frac{1}{2}\sum_{i,jk=1}\frac{\delta^2 w}{\delta x_i x_j}\sigma_{ik}\sigma_{ik}dt$$
$$=\left[\frac{\delta w}{\delta t}+\sum_1^n\frac{\delta w}{\delta x_i}\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}\frac{\delta^2 w}{\delta x_i x_j}\sigma_{ik}\,\sigma_{jk}\right]dt+\sum_1^n\frac{\delta w}{\delta x_i}\sigma(dz)_i$$

증명은 Liptser and Shiryayer (1977, Vol. 1, pp. 118~222)를 참조하라.

비율에 비례함을 제시해 준다. 따라서 資本利得은 資本利得稅에 의하여 조정되고, 配當은 일반 소득세와 자본이득세에 의하여 조정을 받는다. $r=\lambda$이면 $(1-r)\ (1-\lambda)^{-2}$은 $(1-\lambda)^{-1}$이 된다. 配當과 資本利得이 다같이 資本利得稅(一般所得稅)에 의하여 조정을 받는다. 따라서 投資者는 자본이득과 배당에 無差別的이다. $r<\lambda$이면, $(1-r)\ (1-\lambda)^{-2}$은 1보다 크게되어 투자가는 資本利得보다 配當을 선호한다.

式 (14)의 둘째 네모괄호項은 투자기회집합의 불리한 변동에 대한 헤지를 의미한다. 이 헤지도 稅金에 의하여 조정되어야한다는 것은 자연스러운 귀결이다. $(1-\lambda)^{-1}$가 1보다 크므로 稅金이 존재할 때의 헤지가 稅金이 존재하지 않을 때의 헤지보다 크다. 投資機會가 불리하게 변동하면 투자자의 富와 消費는 그렇지 않을 때 보다 적다. 稅金은 富의 減少를 심화시킨다. 따라서 투자자는 稅金으로 인하여 발생하는 부분에 대하여도 보상을 요구한다. 말하자면, 투자가는 투자기회집합의 불리한 변동에 대하여 보다 유리하게 헤지를 하기를 원하게 된다. 머튼(1973)의 설명과 같이, $\partial c/\partial x_k<0$이면, 다른 여건의 변동이 없을 때, 資產 $i$의 收益과 $x_k$의 變化의 相關係數가 양수이고 이 양의 계수가 커지면 커질수록 資產 $i$를 더 많이 보유하고자 한다. 따라서 事後(ex post)의 투자기회집합이 예상한 것보다 덜 유리하면 투자가는 收益의 陽의 相關關係를 통하여 보다 높은 富의 水準으로 보상을 받기를 기대하게 될 것이다. 稅金의 존재로 인하여 투자가가 消費의 異時的 平準化를 보다 완벽하게 달성할 수 있도록 계획을 수립하게 된다. 왜냐하면 불리한 상황과 유리한 상황에서 富의 變化額이 절대액에서 동일한 경우 不利한 狀況에서 稅金으로 인하여 감소된 富의 限界效用이 유리한 상황에서 세금으로 인하여 감소한 富의 限界效用보다 크기 때문이다.

## Ⅳ. 一定한 投資機會集合下의 異時的 租稅模型

傳統的 資本資產의 價格決定模型은 投資機會集合이 시간의 흐름에 관계없이 일정하다고 가정하고 있다. 따라서 $\alpha, r, \delta, \Omega$가 常數이다. 이때에 投資者 $k$의 포트폴리오는 式 (14)에 의하여 다음과 같이 된다.

$$a_i^k w^k = A^k\Big[(1-\lambda^k)^{-1}\sum_1^n \eta_{ij}(\alpha_j-\delta_j)+(1-r^k)\ (1-\lambda^k)^{-2} \sum_1^n \eta_{ij}(\delta_j-r)\Big]\ \ (i=1,2,\cdots,n). \tag{17}$$

式 (17)은 稅金이 존재할 때 單一期間, 危險忌避型, 平均·分散投資者가 선정하는 포트폴리오와 동일하다. 따라서 式 (17)은 異時的 틀에 의하여 정립된 전통적 租稅 포트폴리오 選定規則인 것이다. 同質的 期待를 가정하고 있으므로 포트폴리오의 構成資產의 投資比率은 選好와는 독

립적이고 모든 투자가에 동일하다. 따라서 다음의 分離定理를 얻는다.

〈定理 1〉 收益이 로그 正規分布를 구성하는 $n$個의 危險性 資本資産과 無危險資産이 資本市場에 존재할 때, 唯一한 雙의 效率的 포트폴리오(두 資金 : mutual fund)가 존재한다. 두 資金 중 하나는 無危險資産이고 다른 資金은 危險性資産으로만 구성된 效率的 포트폴리오이다. 이때 投資家는 選好나 富의 分布나 計劃視野(time horizon)와는 독립적으로 원래의 $(n+1)$개의 資本資産에서 포트폴리오를 형성하는 것과 이 두 資金으로 포트폴리오를 형성하는 것 사이에 無差別的이다. 危險性資産 $j$에 투자하는 危險性資金의 比率은 다음과 같다.

$$\frac{B'}{V'} \tag{18}$$

위에서

$$B'=(1-\lambda_M)^{-1}\sum_1^n \eta_{ji}(\alpha_j-\delta_j)+(1-r_M)\ (1-\lambda_M)^{-2}$$
$$\sum_1^n \eta_{ji}(\delta_j-r)\ ;$$
$$V'=(1-\lambda_M)^{-1}\sum_1^n\sum_1^n \eta_{ji}(\alpha_j-\delta_j)+(1-r_M)\ (1-\lambda_M)^{-2}$$
$$\sum_1^n\sum_1^n \eta_{ji}(\delta_j-r).$$

〈證明〉 資産 $j$에 투자한 첫째 資金의 比率을 $b_j$, 그리고 資産 $j$에 투자한 둘째 資金比率을 $e_j$라 하자. 여기에서 $\sum_j^n b_j=1$이고 $\sum_1^n e_j=1$이다. 그러면 $b_j$와 $e_j$는 다음을 만족시킨다.

$$a_j=\bar{A}B=\xi b_j+(1-\xi)e_j \tag{19}$$

위에서

$$\bar{A}=\frac{A}{W},$$
$$B=(1-\lambda)^{-1}\sum_1^n \eta_{ji}(\alpha_j-\delta_j)+(1-r)\ (1-\lambda(^{-2}\sum_1^n \eta_{ji}(\delta_j r)).$$

式 (19)의 $w, x, t$와 $U$에 대한 解는 다음의 形態를 취한다.

$$b_j=\frac{1}{V}B, \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$
$$e_j=\left(\frac{1}{V}-1\right)B, \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$
$$\xi=\bar{A}+\left(1-\frac{1}{V}\right), \tag{20}$$
$$V=(1-\lambda)^{-1}\sum_1^n\sum_1^n \eta_{ji}(\alpha_j-\delta_j)+(1-r)\ (1-\lambda)^{-2}$$

$\sum_1^n\sum_1^n\eta_{ji}(\delta_j-r)$.

總市場價値에 투자된 투자자 $k$의 富의 比率을 $a^k$라 하자. 그러면 $\sum_k a^k=1$, $B$와 $V$에 이것을 곱하면

$$\begin{aligned} B'=\sum_k a^k B=&(1-\lambda_M)^{-1}\sum_1^n\eta_{ji}(\alpha_j-\delta_j)+(1-\delta_M) \\ &(1-\lambda_M)^{-2}\sum_1^n\eta_{ji}(\delta_j-r) \\ V'=\sum_k a^k V=&(1-\lambda_M)^{-1}\sum_1^n\sum_1^n\eta_{ji}(\alpha_j-\delta_j)+(1-r_M) \\ &(1-\lambda_M)^{-2}\sum_1^n\sum_1^n\eta_{ji}(\delta_j-r) \end{aligned} \tag{21}$$

위에서 $(1-\lambda_M)^{-1}=\sum_k a^k(1-\lambda)^{-1}$ $(1-r_M)$은 $\sum_k a^k(1-r^k)$ $(1-\lambda^k)$가 $(1-\gamma_M)$ $(1-\lambda_M)^{-2}$가 동일하게 해 주는 값이다. $\sum_k a^k=1$이므로 $B'=B$이고 $V'=V$이다. 따라서 資產 $j$에 투자된 危險性 資金의 比率은 $B'/V'$이다. 각 투자자는 두 資金의 1次組合을 선택하는 것과 원래의 資產의 1次組合을 선택하는 것 사이에 無差別的이다. 따라서 각 資金이 보유한 危險性 資產의 比率은 選好, 富의 分布 및 時間視野와 獨立的이어야 한다. $(Q, E, D)$.

이 定理는 모든 投資家가 두개 포트폴리오, 즉 市場稅率에 의하여 조정된 市場포트폴리오와 無危險資產만으로 구성된 포트폴리오를 보유한다는 것을 의미한다. 이 定理는 靜態的, 單一期間의 두 資金定理의 連續的 租稅型인 것이다.

$a_j^k w^k$는 資產 $j$에 대한 투자자 $k$의 수요이고 $\sum_k a^k=1$이므로 式 (17)을 모든 投資家에 대하여 合算해 주면, 資產 $i$에 대한 總市場需要 $D$를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} D_i=&\sum_1^k a^k\sum_1^k A^k(1-\lambda^k)^{-1}\sum_1^n\eta_{ij}(\alpha_j-\delta_j)+\sum_1^k a^k\sum_1^k A^k(1-r^k) \\ &(1-\lambda^k)^{-2}\sum_1^n\eta_{ij}(\delta_j-r)\quad(i=1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{22}$$

$\lambda_M=\sum_1^k a^k\lambda^k$, $KA(1-\lambda_M)^{-1}=\sum_1^k\sum_1^k a^k A^k(1-\lambda^k)^{-1}$, $KA(1-r_M)$ $(1-\lambda_M)^{-2}=\sum_1^k\sum_1^k a^k A^k$ $(1-\gamma^k)$ $(1-\lambda^k)^{-2}$로 정의하자. 그러면 式 (22)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D_i=KA\Big[\sum_1^n\eta_{ij}[(1-\lambda_M)^{-1}(\alpha_j-\delta_j)+(1-r_M)\ (1-\lambda_M)^{-2}\ (\delta_j-r)] \tag{23}$$

$M=\sum^{n+1} D_i$라 하자. 그러면 $M$은 市場에 있는 모든 資產의 均衡價値이다. 따라서 $a_i=D_i/M$ 즉, $D_i=a_i\ M$이다. 式 (23)에 대입하고 풀면

$$(\alpha_i-\delta_i)=(\alpha_M-\delta_M)\frac{\sigma_i M}{\sigma_M{}^2}+(1-r_M)\ (1-\lambda_M)^{-2}$$

$$(\delta_M - r)\frac{\sigma_i M}{\sigma_M^2} - \frac{(1-r_M)}{(1-\lambda_M)^2}(\delta_i - r),$$
$$(i=1, 2, \cdots, n)$$

다음과 같이 정의하자.

$$(1-\xi_M) = \frac{1-r_M}{(1-\lambda_M)^2} = \tau$$

그러면 式 (24)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\alpha_i = r + [(\alpha_M - r) - (\delta_M - r)\zeta_M]\frac{\sigma_i M}{\sigma^2_M} + (\delta_i - r)\zeta M, \quad (i=1, 2, \cdots, n). \qquad (25)$$

$\zeta_M$ 대신 $\tau$ 로 표현하면

$$\alpha_i = \tau_r + [(\alpha_M - \tau_r) - (1-\tau)\delta_M]\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} + (1-\tau)\delta_i, \quad (i=1, 2, \cdots, n). \qquad (25)'$$

式 (25) 또는 (25) 이 投資機會集合이 일정하다는 가정하에서 얻은 資本資產의 異時的 價格決定 租稅模型이다. 이 式은 投資家마다 限界稅率이 상이할 때 不確實性下에서의 市場評價의 基本原理인 것이다. 이 모형에 의하면 資本資產의 危險에 대한 期待프리미엄 또는 必須프리미엄은 그 資產의 危險의 特性과 期待配當率의 函數라는 것이다. 이 결과를 직관적으로 해석하면, 危險水準이 주어질 때 예상배당율이 높으면 높을 수록 투자가는 보다 높은 總收益率을 요구한다는 것이다. 이것은 資本利得稅率이 配當稅率보다 높기 때문이다.

이 모형은 브레넌(1973)의 모형과 리첸버거와 라와스와미(1979)의 모형과는 상이하다. 우리의 모형이 그 기본적인 특성 및 구조와 함수관계에 있어서는 그들의 모형과 동일하다. 그러나 市場稅率의 計算에 있어서 차이가 있다. 우리의 모형에 있어서 加重市場稅率은 해석이 용이하다. 위에서 정의한 바와 같이, $\lambda_M$은 투자가의 資本利得稅의 加重平均인데, 가중치는 市場價值에 투자된 투자가의 富의 比率이다. 市場所得稅率 $r_M$에도 동일한 해석이 적용된다. 그러나 브레넌模型의 稅率은 투자가의 稅率의 복잡한 가중평균으로서 가중치는 危險性資產에 투자된 투자비율과 危險忌避程度의 函數이다. 여기에서 위험기피는 투자자가 보유하는 포트폴리오의 超過收益과 分散의 比率이다. 리첸버거와 라마스와미는 所得에 관련된 借入에 대한 制約條件의 限界價值(shadow price)와 平均포트폴리오의 期待限界效用과의 比率을 모든 投資家에 대하여 가중으로 평균한 것을 중요시한다. 그래서 그들의 모형의 市場稅率은 投資家의 限界稅率의 加重平均에서 한계가치와 기대한계효용의 市場加重平均을 차감한 것이다.

式 (25)의 마지막 項을 살펴보자. $\delta_i > r$ 이면, 일반적으로 $\zeta > 0$ 이므로 이 項은 陽이되어 納稅前收益에 陽의 영향을 미친다. $\delta_i > 0$, $\delta_M > r$ 그리고 $\sigma_{iM} > 0$ 일 때, 配當率은 資本資產의 納稅前收益에 陽의 영향을 미친다. 配當率이 미치는 영향을 보기 위하여 $\delta_i$에 대하여 式 (25)을 미분

하면 $\partial\alpha_i/\partial\delta_i=\zeta_M$이 되며, 이것은 稅率이 1보다 적어 陽數가 된다. $\zeta_M$은 所得稅가 높은 계층에게는 陽이므로 配當率이 높은 資産이 높은 收益率을 요구한다.

稅金이 均衡收益率에 미치는 效果를 파악하기 위하여 (1—所得稅率)과 (1—資本利得率)의 제곱의 비율로 式 (25)을 미분하면 다음의 관계를 얻는다.

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial\zeta_M}=-(\delta_M-r)\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M{}^2}+(\delta_i-r). \tag{26}$$

式 (26)은 중요한 經濟的 意味를 제공해 준다. 資本市場이 $\beta$가 1이고 配當率이 市場配當率과 證券으로 구성되어 있을 경우, 式 (26)은 0이 된다. 이 때 稅金은 이 資本資産의 收益率에 영향을 미치지 않는다. 따라서 밀러 (1977)의 租稅無關性定理가 성립되며, 모딜리아니와 밀러 (1961)의 配當無關性의 定理도 성립된다.

## V. 租稅의 異時的 一般模型

우리의 世界는 불행히도 一定한 投資機會集合의 가정과 일치하지 않으며 이 集合은 시간에 따라 변한다. 投資機會集合의 變動을 모형에 도입하기 위하여, 머튼(1973)이 한 것과 같이, 單一의 狀態變數가 機會集合의 變化를 표상해 준다고 가정하자, 그러면 式 (14)는 投資者 $k$에 대하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} a_i{}^k w^k = {} & A^k(1-\lambda^k)^{-1}\sum_1^n\eta_{ij}(\alpha_j-\delta_j)+(1-r^k)\ \ (1-\lambda^k)^{-2} \\ & \sum_1^n\eta_{ji}(\delta_j-r)+(1-\lambda^k)^{-1}B^k\sum_1^n{}_{ij}\sigma_{jr} \\ & (i=1,2\cdots,n). \end{aligned} \tag{29}$$

머튼과 같이, 收益이 $r$의 變化와 完全陰의 相關係數, 資産이 즉 $\rho_{nr}=-1$를 갖는 資産이 존재한다고 가정하고 이 자산은 $n$번째 資産이라 하자. 그와 같은 資産은 破産危險이 없는 長期債券이나 파산위험이 없는 (베타가 0인) 長期債券의 포트폴리오이다. 이 경우 資産 $j$와이 債券의 利子率의 共分散 $\sigma_{jr}$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{jr} &= \rho_{jr}\sigma_j h=-h(\rho_{jn}\sigma_j\sigma_n)/\sigma_n\ \ (\therefore \rho_{jr}=-\rho_{jn}) \\ &= -h\sigma_{jn}/\sigma_n \end{aligned}$$

위에서 $h$는 $r$의 變化의 標準偏差이다. 이것을 式 (27)에 대입하면

$$a_i{}^k w^k = A^k(1-\lambda^k)^{-1}\sum_1^n\eta_{ij}(\alpha_j-\delta_j)+(1-r^k) \tag{28}$$

$$(1-\lambda^k)^{-2}\sum_1^n \eta_{ij}(\delta_j-r) \quad (i=1,2,\cdots,n-1),$$

$$a_n^k w^k = A^k(1-\lambda^k)^{-1}\sum_1^n \eta_{nj}(\alpha_j-\delta_j)+(1-\gamma^k) \quad (1-\lambda^k)^{-2}$$

$$\sum_1^n \eta_{nj}(\delta_j-r)-(1-\lambda^k)^{-1}B^k h/\sigma_n.$$

위의 마지막 項에서 $\eta_{ij}$는 $\sigma_{ij}$의 逆이므로 $\sigma_{nj}$와 $\eta_{nj}$의 積은 1이 된다. 式 (28)에서 投資家의 最適프트폴리오 理論의 특성을 도출할 수 있다.

〈**定理 2**〉 一般所得稅率과 資本利得稅率이 상이하고 $n$個의 危險性資產과 無危險性資產으로 구성된 資本市場에 3資金이 존재하며 모든 危險忌避型 投資家는 원래의 $(n+1)$個 資本資產으로 포트폴리오를 구성하는 것과 이 3資金으로 포트폴리오를 구성하는 것 사이에 無差別的이다. 이 3資金은 無危險資產, 市場稅率로 조정된 市場포트폴리오, 그리고 市場稅率로 조정된, 確產危險이 없는 完全陰의 相關關係債權 또는 長期債券의 포트폴리오이다.

〈**證明**〉 첫째 資金이 〈定理 1〉과 동일한 비율로 보유한다고 하자, 즉 $b_i=B_i'/V'$ $i=1,2,\cdots,n$. 둘째 資金은 $n$번째 資金 또는 베타가 0인 完全陰의 相關關係포트폴리오만을 보유하며, 세째 資金은 無危險資產만을 보유하고 있다 하자, $y_j^k$를 $j$번째 資金에 투자한 투자가 $k$의 富의 比率이라 하자. $j=1,2,3$이고 $\sum_1^3 y_j^k=1$이다. 각 危險性 資產에 투자된 첫째 資金의 比率과 $n$번째 資產에 투자된 둘째 자금의 比率은 다음을 만족시켜야 한다.

$$y_1^k b_i=\frac{A^k}{W^k}\Big[(1-\lambda^k)^{-1}\sum_1^n \eta_{ij}(\alpha_j-\delta_j)+(1-r^k)$$

$$(1-\lambda^k)^{-2}\sum_1^n \eta_{ij}(\delta_j-r) \quad (i=1,2,\cdots,n-1),$$

$$y_n^k b_n+b_n^k=\frac{A^k}{W^k}\Big[(1-\lambda^k)^{-1}\sum_1^n \eta_{nj}(\alpha_j-\delta_j)+(1-\gamma^k)$$

$$(1-\lambda^k)^{-2}\sum_1^n \eta_{nj}(\delta_j-r)-(1-\lambda^k)^{-1}\; B^{kh}/\alpha_n w^k. \tag{29}$$

$bi=B_i'/V'=Bi/V$이므로 다음의 配分을 얻는다.

$$y_1^k=\frac{A^k}{W^k}\Big[(1-\lambda^k)^{-1}\sum_1^n\sum_1^n \eta_{ij}(\alpha_j-\delta_j)+(1-r^k(1-\lambda^k)^{-1}$$

$$\sum_1^n\sum_1^n \eta_{ij}\;(\delta_j-r),$$

$$y_n^k=-(1-\lambda^k)^{-1}\; B^k h/\sigma_n w^k. \tag{30}$$

式 (30)는 式 (29)를 만족시킨다. $(Q,E,D)$.

이 定理는 投資家는 狀態變數 $H(t)$와 상관관계가 대단히 높은 포트폴리오, 무위험자산 및 市場포트폴리오를 보유함을 보여준다. 이것은 市場포트폴리오가 社會的 危險에 헤지作用을 하고

높은 相關關係 포트폴리오는 消費集合과 投資機會集合의 變動에 헤지作用을 한다고 해석할 수 있다.

式 (28)을 市場에 있는 모든 投資者에 대하여 합산하면 資產 $i$의 市場需要를 다음과 같이 얻는다.

$$D_i=KA(1-\lambda_M)^{-1}\sum_1^n\eta_{ij}(\alpha_j-\delta_j)+KA(1-r_M)$$
$$(1-\lambda_M)^{-2}\sum_1^n\eta_{ij}(\delta_j-r)\quad(i=1,2,\cdots,n)\ ; \qquad (31)$$
$$D_n=KA(1-\lambda_M)^{-1}\sum_1^n\eta_{nj}(\alpha_j-\delta_j)+KA(1-r_M)$$
$$(1-\lambda_M)^{-2}\sum\eta_{nj}(\delta_j-r)-KB(1-\lambda_M)^{-1}\ h/\sigma_n$$

위에서 $KB(1-\lambda_M)^{-1}=\sum_1^k a^k\sum_1^k B^k(1-\lambda_M)^{-1}$이다. 式 (33)에 $D_i=a_iM$을 대입하고 個別資產의 期待均衡收益에 대하여 풀고, 그 결과에 $a_i$를 곱하고 市場에 존재하는 모든 資產에 대하여 합산하여 解를 구한다. 이 式은 어느 資產이나 포트폴리오에 대하여도 성립하므로 $n$번째 資產도 이 式을 만족시킨다. 따라서 $n$번째 資產에 대하여 유사한 식을 유도한다. 각각 첫째式에 $\sigma_n^2$을 두째식에 $\sigma_{nM}$을 곱하여 푼 후 共分散과 相關關係에 관계를 이용하여 정리하면 다음의 결과를 얻는다.

$$(\alpha_i-r)=\frac{\sigma_i[\rho_{iM}-\rho_{in}\rho_{nM}]}{\sigma_m(1-\rho_{nM}^2)}[(\partial_M-\delta_M)+\tau(\delta_M-r)]$$
$$+\frac{\sigma_i[\rho_{in}-\rho_{in}\rho_{nM}]}{\sigma_n(1-\rho_{nM}^2)}[(\partial_n-\delta_n)+\tau(\delta_n-r)]+(1-\tau)\ \ (\delta_i-r)]$$
$$(i=1,2,\cdots,n-1) \qquad (32)$$

式 (32)가 資本資產의 異時的 價格決定租稅模型이다. 이 모형에 의하면, 投者者는 均衡에서 市場危險을 부담하고, 投資機會集合의 不利한 變動에서 발생하는 危險을 부담하고, 一般所得稅와 資本利得稅를 지급하는데 대하여 期待收益으로 보상을 받는다는 것이다. 머튼(1973)의 모형에서와 같이, 資本資產에 市場危險이 존재하지 않는다 해도 이 자산의 期待收益은 投資機會集合이 一定하다는 가정하에서 정립된 租稅模型인 式 (27)에서 예측한 無危險率과 일치하지 않는다. 이 一般模型에서는 投資者가 確率的 投資機會集合에 직면할 때 이 기회집합의 不利한 變動에 대하여 헤지를 하기 위하여 無危險率의 變化와 完全陰의 相關係數를 유지하는 베타가 0인 포트폴리오를 형성한다. 투자자는 無危險資產에 대한 投資가 기회집합의 불리한 변동에 대하여 완전히 보상을 해 준다고 생각치 않게되어, 消費의 時間的 不均衡을 제거하고 평생의 생활수준을 평준화시키기 위하여 無破產의 完全陰의 相關 포트폴리오를 구성한다.

式 (32)의 첫項은 無危險資產의 收益을 초과하는 기대수익으로서 市場稅率의 調整을 받는다. 둘째 項은 균형에서 이룩해야하는, 稅金이 조정된 危險프리미엄이다. 마지막 項은 세금이 조정

된 無危險利子率이다.

式 (32)는 稅金을 도입하여 머튼 (1973)의 모형을 일반화한 것으로써 市場配當, 個別資產의 配當 및 稅率의 效果를 명백하게 제시해 주고 있다. 稅率이 0이고 配當을 변수로서 도입하지 않으면, 式 (32)의 租稅模型은 머튼模型과 동일하게 된다. 稅金이 존재하면 투자자는 配當稅와 資本利得稅를 지급해야 한다. 市場과 個別投資家는 一所般得稅와 資本利得稅가 동일한 경우도 포함하여 이 세금효과를 資本資產의 價格決定에 반영시킨다. 式 (32)는 세금의 효과가 분명히 존재한다는 것을 보여주고 있다. 그리고 配當이 단독으로서는 資產의 均衡期待收益間의 關係에 영향을 미치지 않는다. 따라서 모딜리아니와 밀러 (1958, 1961, 1963)의 配當無關性의 定理와 租稅定理는 성립하지만, 밀러 (1977)의 租稅無關性의 定理는 성립하지 않는다.

## Ⅵ. 消費베타 租稅模型

제 5 절에서 一般所得稅와 資本利得稅가 상이할 때 資本資產의 異時的 價格決定租稅模型을 도출하고 資本構造에 대한 理論을 얻었다. 그런데 式 (12)와 式 (13)을 좀더 자세히 고찰하면 消費와 資本資產의 價格과의 직접적인 관계를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

式 (12)에서 $J_w{}^k = U_c{}^k$ 이다. 따라서 $J_{wx}{}^k = U_{cc}{}^k C_w{}^k$ 이고 $J_{wx}{}^k = U_{cc}{}^k C_x{}^k$ 이다. 그러므로 다음의 關係를 얻는다.

$$\frac{J_w}{J_{ww}{}^k} = \frac{U_c{}^k}{U_{cc}{}^k C_w{}^k},$$

$$\frac{J_{wx}{}^k}{J_{ww}{}^k} = \frac{C_x{}^k}{C_w{}^k}$$

위의 두식을 式 (13)에 대입하면, 最適포트폴리오는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} a_i{}^k w^k = \frac{-U_c{}^k}{U_{cc}{}^k C_w{}^k} \Big[ & (1-\lambda^k)^{-1} \sum_1^n \eta_{ij} (\alpha_j - r) + (1 - r^k) \\ & (1-\lambda^k)^{-2} \sum_1^n \eta_{ij} (\delta_j - r) \Big] - (1-\lambda^k)^{-1} \\ & \sum_1^m \sum_1^n \frac{C_x{}^k}{C_w{}^k} \sigma_j h_x \theta_{jx} \eta_{ij} \\ & (i = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned} \tag{33}$$

$-F^k = U_c{}^k / U_{cc}{}^k$ 라고 하고 式 (33)에 $c_w{}^k \sigma_{ij}$ 를 곱하면,

$$c_w{}^k a_i{}^k \sigma_{ij} w^k = F^k \Big[ (1-\lambda^k)^{-1} \sum_1^m (\alpha_j - r) + (1 - r^k)$$

$$(1-\lambda^k)^{-2}\sum_1^n(\delta_j-r)\Big]$$
$$-(1-\lambda^k)^{-1}\sum_1^m\sum_1^n c_x{}^k\sigma_j h_x\theta_{jx}$$
$$(i=1,2,\cdots,n).$$

위에서 $\sigma_j h_x \theta_{jx}$ 는 資本資產의 收益과 狀態變數와의 共分散이며 이것을 $\pi_{jx}$ 라 하고 위 式을 정리하면

$$F^k[(\alpha_i-\delta_i)+(1-\gamma^k)\ (1-\lambda^k)^{-1}\ (\delta_i-r)]$$
$$=(1-\lambda^k)\Big(\sum_1^n c_w{}^k a_i{}^k\sigma_{ij}w^k+\sum_1^n\Big)\sum_1^m\sum_1^n c_x{}^k\pi_{jx}.$$

위의 式을 정리하면

$$F^k\Big[(\alpha_i-\delta_i)+(1-\gamma^k)\ (1-\lambda^k)^{-1}\ (\delta_i-r)\Big]=(1-\lambda^k)\sum_1^n c_w{}^k\sigma_i a_j{}^k$$
$$+\sum_1^n\sum_1^m\sum_1^n\ c_x{}^k\pi_{ix}, \tag{34}$$

위에서 $\sigma_i a_j{}^k$ 는 資產의 收益과 投資者 $k$ 의 富의 變化의 共分散이다. $k$ 의 最適消費는 자기의 富 狀態變數 및 時間의 函數, 즉 $c^k(w^k, t, x)$ 이므로 이토 補助定理(Itô's lemma)를 사용하면 $k$ 의 消費의 變化와 資產의 收益간의 局部的 共分散이 다음과 같이 도출된다.

$$\sigma_{icj}{}^k=(1-\lambda^k)\sum\sigma_{iaj}{}^k c_w{}^k+\sum_1^m\sum_1^n\pi_{ix}c_x{}^k\ \ (i=1,2,\cdots,n). \tag{35}$$

式 (35)를 式 (34)에 대입하면

$$F^k\Big[(\alpha_i-\delta_i)+(1-r^k)(1-\lambda^k)^{-1}\ (\delta_i-r)\Big]=\sum_1^n\sigma_{icj}{}^k\ \ (i=1,2,\cdots,n). \tag{36}$$

$c_j{}^k$ 를 모든 $j$ 에 대하여 합산하면 投資者 $k$ 의 總消費 $c^k$ 가 되므로 $\sum_1{}^n\ \sigma_{icj}{}^k=\sigma_{ic}{}^k$ 이다. 式 (36)을 모든 投資家에 대하여 합산하면

$$[(\alpha_i-\delta_i)+(1-\zeta_m)(\delta_i-r)]=(F^M)^{-1}\sigma_{ic}\ \ (i=1,2,\cdots,3) \tag{37}$$

確率的消費의 變化와 總危險許用을 현재의 소비로 나누면 式 (37)은 消費의 變化率, 즉 消費의 對數(logarithm)의 變化와 資產의 共分散으로 표시할 수 있다. 즉

$$(\alpha_i-\delta_i)+(1-\zeta_M)(\delta_i-\mathrm{r})=\Big(\frac{F_M}{C}\Big)^{-1}\sigma_{i,\,\log c}$$
$$(i=1,2,\cdots,n). \tag{38}$$

式 (38)에 $a_i$을 곱하고 모든 投資家에 대하여 합산하면

$$[(\alpha_M-\delta_M)+\tau(\delta_M-r)]=\left(\frac{F^M}{C}\right)^{-1}\sigma_{M\cdot\log c}$$

$$\left(\frac{F^M}{C}\right)^{-1}=\frac{(\alpha_M-\delta_M)+\tau(\delta_M-r)}{\sigma_{M\cdot\log c}}$$

따라서

$$\left[(\alpha_i-\delta_i)+\tau(\delta_i-r)\right]=\left[(\alpha_M-\delta_M)+\tau(\delta_M-r)\right]\frac{\sigma_{i\cdot\log c}}{\sigma_{M\cdot\log c}}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

다음과 같이 정의하자

$$\beta_{ic}=\frac{\mathrm{cov}(\alpha_i,d\ \log c)}{\mathrm{Var}(d\ \log c)}$$

$$\beta_{Mc}=\frac{\mathrm{cov}(\alpha_M,\ d\log c)}{\mathrm{var}(d\ \log c)}$$

그러면 다음의 模型을 얻는다.

$$\alpha_i=\left[(\alpha_M-\delta_M)+\tau(\delta_M-r)\frac{\beta_{ic}}{\beta_{Mc}}+\tau r+(1-\tau)\delta_i\right)\quad(i=1,2,\cdots,n).\tag{39}$$

式 (39)는 一般所得稅와 資本利得稅가 상이할 때 資本資產의 價格을 결정하는 異時的 消費베타 租稅模型이다. 브리든 (1979)의 模型과는 달리 이 모형은 配當이 직접 도입되고 稅金의 效果가 반영되어 있다. 消費베타租稅模型은 세금이 자본자산의 가격결정에 영향을 미치며 따라서 資產의 均衡期待收益率에 영향을 미치고 있음을 보여준다. 收益이 總消費의 變化와 완전 상관을 갖는 資產이나 포트폴리오가 존재하면 式 (39)의 危險과 收益과의 關係는 資產의 收益에 대하여 측정된 베타 $\beta_c$, 기대수익 $\alpha^*$와 配當率 $\sigma^*$로 쓸 수 있다. 즉

$$\alpha_i=[(\alpha^*-\delta^*)+\tau(\delta^*-r)]\ \beta_c+\tau r+(1-\tau)\delta_i\ \ (i=1,2,\cdots,n).\tag{40}$$

式 (40)은 收益이 總消費의 變化와 완전 상관관계를 갖는 資產이나 포트폴리오가 존재한다는 가정에 입각하여 도출된 것이다. 投資家는 平生의 消費를 平準化하기 위하여 그와같은 포트폴리오를 구성한다. 消費베타租稅模型은 不確實性의 源泉이 얼마나 많으냐하는 것과는 상관없이 각 資本資產의 期待收益은 그 資產의 收益과 總消費의 共分散, 租金 및 配當의 函數라는 것을 보여주고 있다.[9] 資產의 價格은 일반적으로 오늘의 消費와 미래의 期待消費의 限界價値에 의존한다. 資本資產이나 證券은 한 期에서 다른 期로 구매력을 이전시키기 위하여 보유한다고 할 수 있다. 따라서 收益은 消費의 效用을 얼마나 증진시키느냐에 달려 있다.

9) 消費베타의 보다 자세한 설명은 Breeden (1979)과 Alexander and Francis을 참조하라.

追加的 消費로 인한 限界效用은 일반적으로 순간마다 변한다. 위험성 자산을 추가적으로 한 단위 더 보유하면 그만큼 소비를 하지 못하여 限界效用이 감소한다. 균형에서 소비의 상실로 인한 결손은 추가적 기대수익과 동일해야 한다. 限界代替率은 일반적으로 기간마다 변한다. 미래가 호시절이냐 아니냐에 따라서 消費는 높거나 낮다. 消費의 限界效用은 체감하므로 限界效用은 好時節에 낮고 惡時節에 높다. 따라서 收益이 총소비와 完全陽의 相關을 갖는 資產은 총소비와 완전음의 상관을 갖는 자산만큼 매력적이라고 할 수 없다. 따라서 現在의 價値가 낮고 기대수익은 비교적 높다. 資本資產의 消費베타는 그 資產과 총소비와의 相關係數의 陽의 函數이다. 베타가 높은 資產은 好時節에 수익이 높고 베타가 낮은 자산은 惡時節에 수익이 높다. 따라서 베타가 높은 資產은 베타가 낮은 자산보다 현재의 가격이 낮고 기대수익은 높다.

브리든(1979)은 最適消費의 特性을 제시하였는 바, (1) 한 순간에 있어서 모든 投資家의 最適消費率은 完全陽의 相關을 갖는다. (2) 각 순간에 각 투자가의 消費率의 變化의 순간적 표준편차는 애로우·프래트(Arrow and pratt)의 相對的危險許用値에 비례한다. 따라서 다음의 定理를 얻는다.

**〈定理 3〉** 〔브리든〕 資本市場이 資費의 制約條件없는 파레토 最適分配을 하고 經濟行爲가 연속적으로 수행되면, 각 순간에 있어서, 각 투자가의 最適消費率의 變化는 모든 다른 投資家의 最適消費率의 變化와 完全陽의 相關을 갖고, 總消費의 變化와도 완전양의 상관관계를 갖는다.

**〈證明〉** 投資家 $k$와 $j$의 消費의 變化의 순간적 공분산은 부록에 의하여 다음과 같다.

$$\mathrm{cov}(c^k, c^j) = F^k F^j \tilde{G} \tag{41}$$

따라서 相關係數는

$$\mathrm{Corr}(c^k, c^j) = \frac{F^k F^j \tilde{G}}{\sqrt{(F^k)^2 \tilde{G}}\ \sqrt{(F^j)^2 \tilde{G}}} \tag{42}$$

式 (41)을 모든 투자가에 대하여 합산하면 각투자가의 消費와 市場總消費와의 相關係數는 1이 됨을 알 수 있다. $(Q, E, D)$

이 定理에는 세금항이 없고 브리든의 定理 2와 동일하다. 투자자는 納稅後의 富를 소비하므로 소비의 共分散에는 稅金項이 포함되어서는 안된다.

브리든이 보여준 바와 같이, 制約條件없는 파레토最適分配가 불가능할 때 最適消費率의 變化는 투자자들간에서 완전 상관을 반드시 갖는 것은 아니며 總市場消費의 變化와도 완전상관을 반드시 갖는다고는 볼 수 없다.

**〈定理 4〉** 資本市場이 消費의 制約없는 파레토最適分配를 허용하고 經濟가 연속적으로 운행하면, 각 순간에 있어서 각 투자가의 소비의 변화의 순간적 標源偏差는 애로우·프래트의 相對危險許用에 비례한다.

**〈證明〉** 式 (41)에 의하여 $\mathrm{std}(C^k) F^k \sqrt{\tilde{G}}$ 이고 $\mathrm{std}(C^M) = F^M \sqrt{\tilde{G}}$ 이다. 따라서

$$\frac{\operatorname{std}(C^k)}{\operatorname{std}(\mathscr{C}^M)}=\frac{F^K}{F^M}$$

消費의 成長率의 관점에서 볼 때 $F^{*K}=F^K/C^K, F^{*M}=F^M/C^M$ 이라하면 std(logc$^K$)/std(logc$^M$)이다. 여기에서 $F^{*K}$는 投資家 $K$의 相對的 危險許用이고 $F^{*M}$은 總相對的 危險許用(aggregate measure of relative risk tolerance)이다. $(Q, E, D)$

이 定理의 의미는 危險忌避가 높은 투자자는 異時的 消費의 平準化를 기하기 위하여 위험기피가 낮은 투자자에 비하여 변동이 낮은 異時的 消費의 形態를 취한다. 위험기피형 투자자는 確率的 投資機會集合의 不利한 變動에 대하여 헤지를 하려고 한다. 따라서 投資者의 富는 確率的 投資機會가 最適消費에 미치는 영향을 상쇄할 수 있도록 변한다. 消費베타 租稅模型에 있어서도 앞의 一般模型에서와 같이, 어느 資產 $i$에 市場危險이 존재하지 않아도 그 資產의 收益率 $\alpha_i$는 無危險率과 일치하지 않는다.

## Ⅶ. 結 論

이 論文에서는 一般所得稅와 資本利得稅가 상이할 때 確率的 投資機會集合下에서 資本資產 收益들간의 均衡關係를 표상하는 異時的 租稅模型을 정립하였다. 이 논문은 資本市場에서 資本資產의 價格이 형성되는 과정에 一般所得稅와 資本利得稅를 도입하여 머톤(1973)과 브리든(1979)의 모형을 확대 심화시켜서 일반화한 것이라 할 수 있다. 이 모형에서 稅金은 資本資產의 價格決定에 영향을 미친다.

연속시간의 상황에서의 균형에 있어 資本資產의 納稅前收益이 體係的 危險과 配當에 1次式의 관계를 갖는다. 특히 確率的 投資機會集合이 존재하는 현실상황에 있어서 資本資產의 納稅前收益은 市場危險, 破產全無한 完全陰의 相關關係포트폴리오, 配當率과 市場稅率의 1次函數이다. 異時的 消費 베타租稅模型에 있어서는 納稅前收益은 收益이 總市場消費의 變化와 완전상관을 갖는 포트폴리오와 配當率과 1次關係를 갖는다. 그런데 資本資產에 시장위험이 존재하지 않을 경우에도 異時的 模型은 전통적 模型과 브레넌(1973)과 리첸버거와 라마스와미(1979)의 모형과 일치하지 않는다.

이 논문에서 정립된 모형에 의하면, 資本資產의 納稅前收益과 配當率간에는 陽의 關係가 존재한다. 配當變數는 陽의 係數를 갖는다. 그리고 일반적 상황에서는 資本構造에 대한 모딜리아니와 밀러의 租稅定理와 配當의 無關係性定理가 성립된다. 그러나 어느 資產의 配當率이 市場配當率과 동일할 경우에 한하여 밀러(1977)의 租稅無關性 定理가 성립된다.

이 논문에서 정립된 모형은 相對價格이 시간이 감에 따라 변하는 多種의 消費財와 賃金을 도입하여 확대시킬 수 있다. 이 모형은 生產過程을 도입하여 확대시킬 수 있다. 생산과정을 도입

하면 供給側面에 대한 통찰력과 공급과 수요의 相互許用에 대한 깊은 이해를 획득할 수 있다. 뿐만아니라 자본시장의 기능과 자본자산의 가격결정과정을 보다 잘 설명할 수 있을 것이다. 李逸均(1988)은 이 점을 分析하고 있다.

**附錄**(定理 **3**의 證明)

定理 3은 브리든(1979)이 사용한 절차를 따라서 증명하려고 한다. 市場포트폴리오와 $m$ 個의 포트폴리오의 收益의 $(m\times1)\times(m+1)$ 分共分散行列을 $V$라 하자. $c^k=c^k(w,x,t)$이고 $c^j=c^j(w,x,t)$이므로 $c^k$와 $c^j$의 共分散은 이토 補助定理에 의하여

$$\mathrm{Cov}(C^k,C^j)=[C_w^k O C_x^k]\begin{pmatrix} Vw_kw_k & Vw_kw_j & Vw_kx \\ Vw_jw_x & Vw_jw_j & Vw_jx \\ Vxw_k & Vxw_j & Vxx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O \\ C_w^j \\ C_x^j \end{pmatrix}$$

$$=C_x^{k\prime}Vx_{wj}C_w^j+C_x^{k\prime}\ VxxC_x^j+C_w^kVw_kxC_x^j+C_w^kVw_kw_jC_w^j \quad (\mathrm{A}.1)$$

그런데 가정에 의하여

$$V_{xx}=\begin{pmatrix} V_{MM} & V_{Mx} \\ V_{xM} & V_{xx} \end{pmatrix}=V,$$

$$\alpha_i-r=\alpha-r.$$

$$\delta_i-r=\delta-r. \quad (\mathrm{A}.2)$$

그리고 $m\times(m+1)$ 行列 $L$을 다음과 같이 정의하자.

$$L=[0\ I]$$

위에서 0은 $(m\times1)$ 벡터이고 $I$는 $(m\times m)$ 單位行列이다. 그러면 다음의 관계를 얻는다.

$$LV=V_{x,Mx}=[V_{xM}\ V_{xx}] \quad (\mathrm{A}.3)$$

投資家의 最適需要式 (14)에서 다음의 관계가 성립됨을 알 수 있다.

$$C_w^k a^k w^k=(1-\lambda^k)^{-1}V^{-1}F^k(\alpha-r)+(1-r^k)(1-\lambda^k)^{-2}F^kV^{-1}(\delta-r)$$
$$-(-\lambda^k)^{-1}V^{-1}VL'C_x^k, \quad (\mathrm{A}.4)$$

式 (A.4)는 다음을 의미한다.

$$C_w^kVxw_k=LV(c_w^ka^kw^k)=(1-\lambda^k)^{-1}F^kL(\alpha-r)$$
$$+(1-\gamma^k)(1-\lambda^k)^{-2}F^kL(\delta-r)$$
$$-(1-\lambda^k)^{-1}LVL'C_x^k. \quad (\mathrm{A}.5)$$

이제 式 (A.1)의 마지막 項을 평가하자.

$$
\begin{aligned}
C_w^k V w_k w_j C_w^j &= C_w^k W^k a^{k\prime} V a_j W^j C_w^j \\
&= (1-\lambda^k)^{-1} F^k (\alpha-r)' + (1-r^k)(1-\lambda)^{-2} F^k (\delta-r)' - (1-\lambda^k) C_x^k L V]\ V^{-1} \\
&\quad [(1-\lambda^j)^{-1} F^j (\alpha-r) + (1-r^j)(1-\lambda^j)^{-2} F^j (\delta-r) - (1-\lambda^j)^{-1} V L' C_x^j] \\
&= (1-\lambda^k)^{-1}(1-\lambda^j)^{-1} F^k F^j (\alpha-r)' V^{-1} (\alpha-r) \\
&\quad + (1-\gamma^k)(1-\lambda^k)^{-2}(1-\lambda^{-j}) F^k F^j (\delta-r)' V^{-1} (\alpha-r) \\
&\quad - (1-\lambda^k)^{-1}(1-\lambda^j)^{-1} F^j C_x^k L (\alpha-r) \\
&\quad + (1-\lambda^k)^{-1}(1-\gamma^j)(1-\lambda^j)^{-2} F^k F^j (\alpha-r)' V^{-1} (\delta-r) \\
&\quad + (1-\gamma^k)(1-\lambda^k)^{-2}(1-\gamma^j)(1-\lambda^j)^{-2} F^k F^j (\delta-r)'\ V^{-1} (\delta-r) \\
&\quad - (1-\lambda^k)^{-1}(1-\gamma^j)(1-\lambda^j)^{-2} F^j C_x^k L (\delta-r) \\
&\quad - (1-\lambda^k)^{-1}(1-\lambda^j)^{-1} F^k (\alpha-r)' L' C_x^j \\
&\quad - (1-\gamma^k)(1-\lambda^k)^{-2}(1-\lambda^j)^{-1} F^k (\delta-r)' L' C_x^j \\
&\quad + (1-\lambda^k)^{-1}(1-\lambda^j)^{-1} C_x^k L V L' C_x^j
\end{aligned} \tag{A.6}
$$

式 (A.5)와 (A.6)을 式 (A.1)에 대입하면 投資者 $k$와 $j$의 最適消費率의 變化의 共分散을 얻는다. 즉

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(C^k, C^j) &= C_x^{k\prime} [(1-\lambda^k)^{-1}(1-\lambda^j)^{-1} F^k L (\alpha-r) + (1-\gamma^k)^{-1} \\
&\quad (1-\gamma^j)(1-\lambda^j)^{-2} F^j L (\delta-r) \\
&\quad - (1-\lambda^j)(1-\lambda^j)^{-1} L V L' C_x^j] + (1-x^j)^{-1} C_x^{k\prime} L V L' C_x^j \\
&\quad + [(1-\lambda^k)^{-1}(1-\lambda^j)^{-1} F^k (\alpha-r)' L' + (1-\gamma^k)(1-\lambda^k)^{-2}(1-\gamma^j) F^k (\delta-r) L' \\
&\quad - (1-\lambda^k)^{-1}(1-\lambda^j)^{-1} C_x^{k\prime} L V L']\ C'_x \\
&\quad + (1-\lambda^k)^{-1}(1-\lambda^j)^{-1} F^k F^j (\alpha-r)'\ V^{-1} (\alpha-r) \\
&\quad + (1-\gamma^k)(1-\lambda^k)^{-2}(1-\gamma^j)(1-\lambda^j)^{-2} F^k F^j (\delta-r)' V^{-1} (\delta-r) \\
&\quad + (1-\gamma^k)(1-\lambda^k)^{-2}(1-\lambda^j) F^k F^j (\delta-r)' V^{-1} (\alpha-r) \\
&\quad + (1-\lambda^k)^{-1}(1-\gamma^j)(1-\lambda^j)^2 F^k F^j (\alpha-r)' V^{-1} (\delta-r) \\
&\quad - (1-\lambda^k)^{-1}(1-\lambda^j)^{-1} F^j C_x^k L (\alpha-r) \\
&\quad - (1-\lambda^k)^{-1}(1-r^j)(1-\lambda^j)^{-2}\ F^j C_x^k L (\delta-r) \\
&\quad - (1-\lambda^k)^{-1}(1-\lambda^j) F^k (\alpha-\gamma)' L' C_x^j \\
&\quad - (1-\gamma^k)(1-\lambda^k)^{-2}(1-\lambda^j)^{-1} F^k (\delta-r)' L' C_x^j \\
&\quad + (1-\lambda^k)^{-1}(1-\lambda^j) C_x^k L V' L C_x^j.
\end{aligned}
$$

정리하면

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(C^k, C^j) &= F^k F^j [(1-\gamma^k)(1-\lambda^k)^{-2}(1-\gamma^j)(1-\lambda^j)^{-2} \\
&\quad \{(1-\gamma^k)^{-1}(1-\lambda^k)(1-\gamma^j)^{-1}(1-\lambda^j) + (\alpha-\gamma)' V^{-1} (\alpha-r)
\end{aligned}
$$

$$+(\delta-r)'V^{-1}(\delta-r)+(1-\gamma^j)^{-1}(1-\lambda^j)(\delta-r)'V^{-1}(\alpha-r)$$
$$+(1-r^k)^{-1}(1-\lambda^k)\ (\alpha-r)'\ V^{-1}(\alpha-r)\}] \tag{A.7}$$

위의 式의 네모괄호항을 $\tilde{G}$라 하면,

$$\mathrm{Cov}(C^k, C^j)=F^kF^j\tilde{G}. \tag{A.8}$$

<參考文獻>


Alexander, G.J., and Francis, J.C. 1986. *Portfolio analysis.* 3rd ed. N.J.: Prentice-Hall.

Arnold, Ludwig. 1974. *Stochastic differential equations; Theory and applications.* New York: Wiley.

Bellman, R. 1957. *Dynamic programming.* NJ: Princeton University Press.

Black, Fisher. 1972. Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business* 45 (July): 444-455.

Black, Fisher; Jensen, Michael. C.; and Scholes, Myron. 1972. The capital asset pricing model: Some empirical tests. In M.C. Jensen (ed.). *Studies in the theory of capital markets.* New York: Praeger Publishers.

Breeden, D.T. 1979. An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Journal of Financial Economics* 7 (September): 265-296.

Brennan, J.J., and Schwartz, E.S. 1978. Finite difference methods and jump process arising in the pricing of contingent claims: A Synthesis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13 (September): 461-474.

Cheng, Pao L., and Grauer, Robert R. 1980. An alternative test of the capital asset pricing model. *American Economic Review* 70 (September): 660-671.

Constantinides, George M. 1983. Capital market equilibrium with personal tax. *Econometrica* 51 (May): 611-636.

Cornell, B. 1981. The consumption-based asset pricing model: A not on potential tests and applications. *Journal of Financial Economics* 9 (March): 103-108.

Cox, J.C.; Ingersoll, J.E., Jr.; and Ross, S.A. 1985. Intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica* 53 (March): 363-384.

Dybvig, Philip, and Ross, S.A. 1986. Tax clienteles and asset pricing. *Journal of Finance* 41 (July): 751-762.

Elton, Edwin J., and Gruber, Martin J. 1978. Taxes and portfolio composition. *Journal of Financial Economics* 6 (December): 399-410.

Fama, Eugene F., and MacBeth, James D. 1973. Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. *Journal of Political Economy* 81 (May): 607-636.

Flemming, W.H., and Rishel. R.W. 1975. *Deterministic and stochastic optimal contol.* New York: Spring-Verlag.

Friend, Irwin; Landskroner, Yoram; and Losq, Etienne. 1976. The demand for risky assets under uncertain inflation. *Journal of Finance* 31 (December): 1281-1297.

Geske, P., and Shastri, K. 1985. Valuation by approximation: A comparison of alternative option valuation technique. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 20 (March): 45-71.

Gibbons, Michael R. 1982. Multivariate tests of financial models: A new approach. *Journal of Financial Economics* 10 (March): 3-27.

Grossman, S.J., and Shiller, R.J. 1982. Consumption correlatedness and risk measurement in economies with non-trade assets and heterogeneous information. *Journal of Financial Economics* 10 (July): 195-210.

Hakansson, N.H. 1970. Optimal investment and consumption strategies underrisk for a class of utility function. *Econometrica* 38 (September): 587-607.

Huang, C. 1985. Information structure and equilibrium asset price. *Journal of Economic Theory* 34 (February): 33-71.

_____. 1987. An intertemporal general equilibrium asset pricing model: The case of diffusion information. *Econometrica* 55 (January): 117-142.

Kushner, J.J. 1967. *Stochastic stability and control.* New Tork: Academic Press.

Lintner, J. 1965. The valuation of risk assets and the selection of risky investment in stock portfolios and capital budget. *Review of Economics and Statistics* 47 (February): 13-37.

Lipster, R.S., and Shiryayev, A.N. 1977. *Statistics of random process I: General theory.* New York: Spring-Verlag.

Litzenberger, R.H., and Ramaswamy, Krishna. 1979. The effect of personal taxes and dividends on capital asset prices: Theory and empirical evidence. *Journal of Financial Economics* 7 (June): 163-75.

_____, and 1982. The Effects of Dividends on common stock Prices: Tax Effects or Information effects Journal of FInance 31 (May) 429-443.

Lucas, R.E. 1978. Asset prices in an exchange economy. *Econometrica* 46 (Novermber): 1429-45.

Marton, Robert C. 1971. Optimum consumption and portfolio rules in continuous time model. *Journal of Economic Theory* 3 (December): 373-413.

___________, 1973. An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica* 41 (September): 867-887.

Miller, Merton H. 1977. Debt and taxes. *Journal of Finance* 32 (May): 261-275.

___________, and Scholes, Myron, 1982. Dividends and taxes: Some empirical evidence. *Journal of Political Economy* 90 (December): 1118-1141.

___________, and Modigliani, Franco. 1961. Dividend policy, growth and the valuation of shares. *Journal of Business* 34 (October): 411-433.

Modigliani, Franco, and Miller, Merton H. 1958. The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment. *American Economic Review* 48 (June): 261-297.

___________, and ___________, 1963. Corporate income taxes and the cost of capital: A correction. *American Economic Review* 53 (June): 433-443.

Mossin, Jan. 1966. Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica* 34 ((October): 768-783.

Rhee, Il King. 1988. An incomplete information structure and a general equilibrium model of asset pricing with taxes. 韓國經濟學會 學術發表論文集.

Ross, Stephen A. 1987. Arbitrage and martingales with taxation. *Journal of Political Economy* 95 (April): 371-393.

Sharpe, W.F. 1964. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance* 19 (September): 425-442.

Stapleton, R.C., and Subrahmanyam, Marti G. 1978. A multiperiod equilibrium asset pricing model. *Econometrica* 46 (September): 1077-1096.