

MADM(多屬性 意思決定) 方法에 의한 信賴性 評價方法의 選擇*

—Selection of a Suitable Reliability Evaluation Technique By
Multiple Attribute Decision Making Method—

李 明 湖**

◁ 目 次 ▷

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------|
| 1. 서 론 | 方法에 의한 解 |
| 2. MCDM의 특성 | (4) L.A.M.에 의한 解 |
| 3. 모 델 | (5) ELECTRE 方法에 의한 解 |
| 4. MADM 方法의 적용 | (6) TOPSIS에 의한 解 |
| (1) 屬性의 變換 | 5. MADM 方法에 의한 結果의 比較 |
| (2) Conjunctive Constraints에 의한 解 | 6. 結 論 |
| (3) Simple Additive Weighting S.A.W. | |

1. 서 론

複雜한 시스템의 信賴性分析에 관한 문제는 일반적으로 상당한 관심의 對象이 되어왔다. 複雜한 시스템의 信賴性을 評價하는 데에 여러 가지 方法들이 사용될 수 있지만, 그 狀況에 맞는 적합한 方法으로 分析하는 것은 쉬운 일이 아니다.

시스템 信賴性 評價方法의 選擇과 評價는 MCDM(多基準 의사결정)方法이며, 좀더 세분하여 MADA(多屬性 의사결정)方法의 過程이다. 그 基準들은 때로 서로 相衝되며, 그리고 그들의 屬性에 對한 測定이 均일하지 못하다. 즉 몇몇 重要한 基準들은 信賴性 評價에 總計算時間(total computation time), 解의 正確性(accuracy of the solution), 評價方法 使用의 容易性(ease of use of the method), 評價方法의 論理理解의 容易性(ease of understanding the logic of the method) 등이다.

이 論文의 目的은 해당하는 시스템 形態에 따라 적합한 시스템 信賴性 評價方法을 選擇하는데

* 이 論文은 1987 年度 韓國經營學會 秋季學術研究 發表會에서 發表된 內容을 수정·보완한 것임.

** 韓國外國語大學校 經營學科 助教授

† 學會原稿 接受日 1月 26日

MADM(多屬性 의사결정) 方法을 적용하는 過程을 例示하는 것이다.

2. MCDM 의 특징

MCDM(多基準 의사결정方法)은 여러 가지 基準(보통은 相衝되는) 하에서 의사결정을 내리는 경우를 말한다. MCDM 과 관련된 문제들은 주변의 日常生活에서 흔히 일어나는 일들이다. 예를들면 個人的인 次元에서 職場을 選擇할 때 그 職種의 名聲, 위치, 승진기회, 근무조건 등등을 고려한다. 어떤 消費者가 製品을 구매하는 경우에는 그 製品의 價格, 經濟性, 스타일, 안전성, 안락감 등으로 특징지어진다. 젊은 남녀는 배우자를 選擇하는데 知能, 外樣, 性格 등에 그 判斷基準을 두고 있다.

企業의 次元에서, 最高 經營陣의 經營政策은 어떤 기간 동안 該當社의 利益, 株價, 市場占有率, 신용, 勞使關係, 企業이미지, 社會에 對한 책임등에 따라 결정된다. 自動車 生産業者들은 燃料 효율성을 극대화시키고, 승차감을 향상시키며 그리고 생산비용을 최소화하는 모델을 설계하기를 원한다. 學校의 次元에서, 大學行政家는 전임교수의 數, 교직원의 數, 學部 등록학생數 大學院 등록학생數, 교수들의 權威, 새로운 計劃, 그리고 순수한 개선점 등에 따라 大學의 未來像을 결정한다.

公共의 次元에서, 어떤 地域社會를 위한 水資源 開發計劃은 費用, 水不足의 蓋然性, 리크리에이션, 洪水防止, 土地와 山林費用, 水質 등에 따라 평가되어야 한다. 政府의 次元에서, 交通部는 旅行時間出發遲延, 到着遲延, 料金 등을 최소화할 수 있는 輸送體系를 고안하여야 한다. 空軍에서의 미사일시스템의 選擇은 속도, 폭발력, 正確性, 사정거리, 被襲가능성, 信賴性 등에 따라 좌우된다.

이와같이 MCDM 의 문제들은 매우 다양하다. 그러나, 이러한 外樣性에도 불구하고 위에 언급된 모든 문제들은 다음과 같은 공통적 특징을 가지고 있다.

〈多目的 多屬性〉

각 문제들은 多目的/多屬性을 가지고 있다. 의사결정자는 각 문제설정에서 있어 적합한 目的/屬性들을 형성하여야 한다.

〈基準사이의 不一致〉

多基準는 보통 서로 양립하지 않는다. 예를 들면, 승용차를 설계하는데 있어 좀더 나은 燃料 효율을 목표로 하게되면 다소 비좁은 승객석으로 인하여 그 승쾌감이 덜하게 된다.

〈동일단위로 계량화할 수 없는 단위들〉

各 目的/屬性은 서로 다른 측정단위를 가지고 있다. 승용차를 選擇하는 경우에, 연료효율은 1 liter 當 몇 km 나 주행할 수 있는 가로 표현되고, 안락함이 승객석의 공간으로 측정된다면 입방피트(Cu ft)로 표시되며, 安全性은 定性的으로 암시될 수 있으며, 費用은 돈으로 표시된다.

〈設計/選擇〉

이러한 문제들에 대한 해들은 最善의 代案을 設計하거나 또는 이미 명시된 有限한 代案들 中에서 最善을 選擇하는 것이다. MCDM 過程은 모든 基準을 감안하여 가장 매력적인 代案에 대한 設計/探索을 포함한다.

MCDM 의 문제들은 크게 두가지 範疇로 구분될 수 있다. 즉 MADM(Multiple Attribute Decision Making: 多屬性的사결정)과 MODM(Multiple Objective Decision Making: 多目的의사결정)이다. 실제 狀況에서 이러한 分類는 문제풀이의 두가지 양상에 잘 맞는다. MADM 은 選擇(評價)을 위한 것이고, MODM 은 設計를 위한 것이다. 이것은 널리 받아들여지고 있는 分類이다. 〈표 1〉은 이러한 두가지 分類사이의 대칭적인 特徵들을 보여준다.

3. 모 델

모든 문제의 解決策은 目的들을 設定하면서 시작되어야 한다(#12). 그리고 그 目的들은 한 세트로서 서로 相衝되지 않고, 서로 논리적으로 밀착하여 있다. 그렇게 하기 위하여서는 어떤 最高上位의 目的으로부터 단계적으로 副目的들을 끌어내야 한다(#10, #11, #12). 주어진 정책을 달성하기 위하여 設計된 어떤 특정한 代案의 選擇에 있어 全體的 目的들과 下位目標構造의 점진적으로 細部的인 屬性들과의 價値關係를 서술하는데 노력하여야 한다.

〈표 1〉

		MADM	MODM
基	準	屬	性
目	的	압	시
屬	性	명	백
制	限	비	활
限	條	有	동
條	件	限	적
代	案	한	數
의	交	無	限
사	互	限	한
결	作	大	部
정	用	部	分
자		分	計
외		計	
의		價	
交		擇	
互		評	
作		價	
用			

좀 더 具體的으로 시스템 信賴性 問題에서 一般的인 信賴性 評價方法의 例를 들어보자. 시스템 信賴性 評價方法은 다음과 같은 척도에서 評價될 수 있다.

- 1) CPU—컴퓨터 사용기간
- 2) 解(solution)의 정확도
- 3) 評價方法의 論理理解의 容易性
- 4) 評價方法 使用의 容易性

<그림 1>에서와 같이 5 개의 마디(node)와 7 개의 가지(branch)를 保有하고 있는 통신시스템을 고려하여 보자. 이와 같은 一般的 네트워크의 信賴性을 評價하는데 使用될 수 있는 9 가지의 가능한 方法들이 있다. 그러한 代案들을 열거하여 보면;

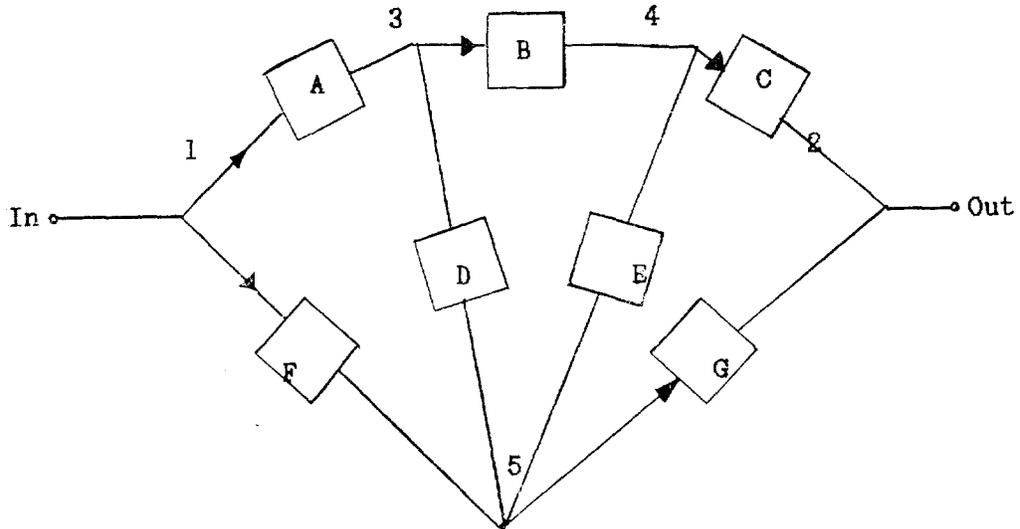


그림 1. A General network

- A₁ ; Exhaustive Search
- A₂ ; Direct Canonical Expansion
- A₃ ; Probability Calculus
- A₄ ; Bayes' Theorem
- A₅ ; Flow Graph method
- A₆ ; Algebraic Extraction
- A₇ ; Fast Algorithm
- A₈ ; An Efficient Method for a General Network
- A₉ ; Symbolic Reliability Evaluation Using Logical Signal Relation

위에 언급된 바와 같이, 各 代案은 4 가지 主要한 基準을 적용하여 評價된다. 9 가지의 方法에 관한(#1, #2, #3, #4, #5, #9) 모든 정보가 <表 2>에 요약되어 있다.

〈표 2〉 시스템 信賴性 評價方法 選擇問題

屬性(X _j) \ 代案(A _i)	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉
1. 總 計 算* 所 要 時 間(X ₁)	3598	3598	1188	1188	1188	398	398	398	623
2. 精 確 度** $\Delta R/\Delta e(X_2)$	14	14	178	178	178	4	4	4	9
3. 理 解 容 易 性	대단히 쉽 다	쉽 다	쉽 다	보 통	어 렵 다	보 통	어 렵 다	어 렵 다	대단히 어 렵 다
4. 使 用 容 易 性	어 렵 다	보 통	보 통	쉽 다	어 렵 다	보 통	쉽 다	보 통	어 렵 다

* 디지털 컴퓨터 IBM 1620에서 소요되는 CPU time을 감안하여 계산된 시간으로, 단위는 μsec 이다.

** R은 시스템 신뢰성(system reliability)의 절대오차(absolute error)이며, e는 부분품신뢰성(component reliability)의 절대오차를 말한다.

4. MADM 方法의 적용

어떤 方法을 使用할 것인가에 대하여, MADM 方法의 選擇 그 自體가 MADM 問題이다. 一般의인 選擇標準에 〈그림 2〉(#11)과 〈그림 3〉(#11)에 나타나 있다. 그와 같은 단계적 狀況判斷을 통하여, 다음과 같은 MADM 方法들 ...Conjunctive Constraints, simple additive weighting, linear assignment method, ELECTRE, and TOPSIS(Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) ...이 信賴性 評價方法 選擇問題를 위하여 使用된다. 이 問題는 4개의 屬性으로 특징지어진 9가지 代案을 가지고 있다.

우선 Simple Additive Weighting(S.A.W.), ELECTRE, and TOPSIS의 方法들을 使用하기 위하여 質的(qualitative or fuzzy) 屬性들을 計量的(quantitative)으로 바꾸어야 한다.

4.1. 屬性의 變換

質的 屬性은 그림 4에 나타난 양극척도(the bipolar scale)를 사용하여 計量化한다. '使用의 用易性(ease of use)'이나 '理解의 用易性(ease of understanding)'과 같은 質的 屬性들은 經驗的 判斷이 必要하다.

다음으로 서로 다른 단위들을 갖고 있는 計量的 屬性들이 比較될 수 있는 척도로 전환된다. 좀더 쉬운 節次는 어떤 判斷 基準의 結果를 그 最大값으로 나누어 주는 것이다. 만약 判斷의 基準이 恩典(benefit)이라면(*i.e.*, X_j 의 값이 크면 클수록 더 選好하게 되는 상황), 그러던 X_{ij} 의 轉換된 結果는

$$r_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j^*}, \text{ where } X_j^* = \max_i X_{ij} \quad (1)$$

모든 質的 屬性(X_3, X_4)들이 恩典의 척도로 變換되었으므로 費用을 內包하는 屬性(X_1, X_2)들

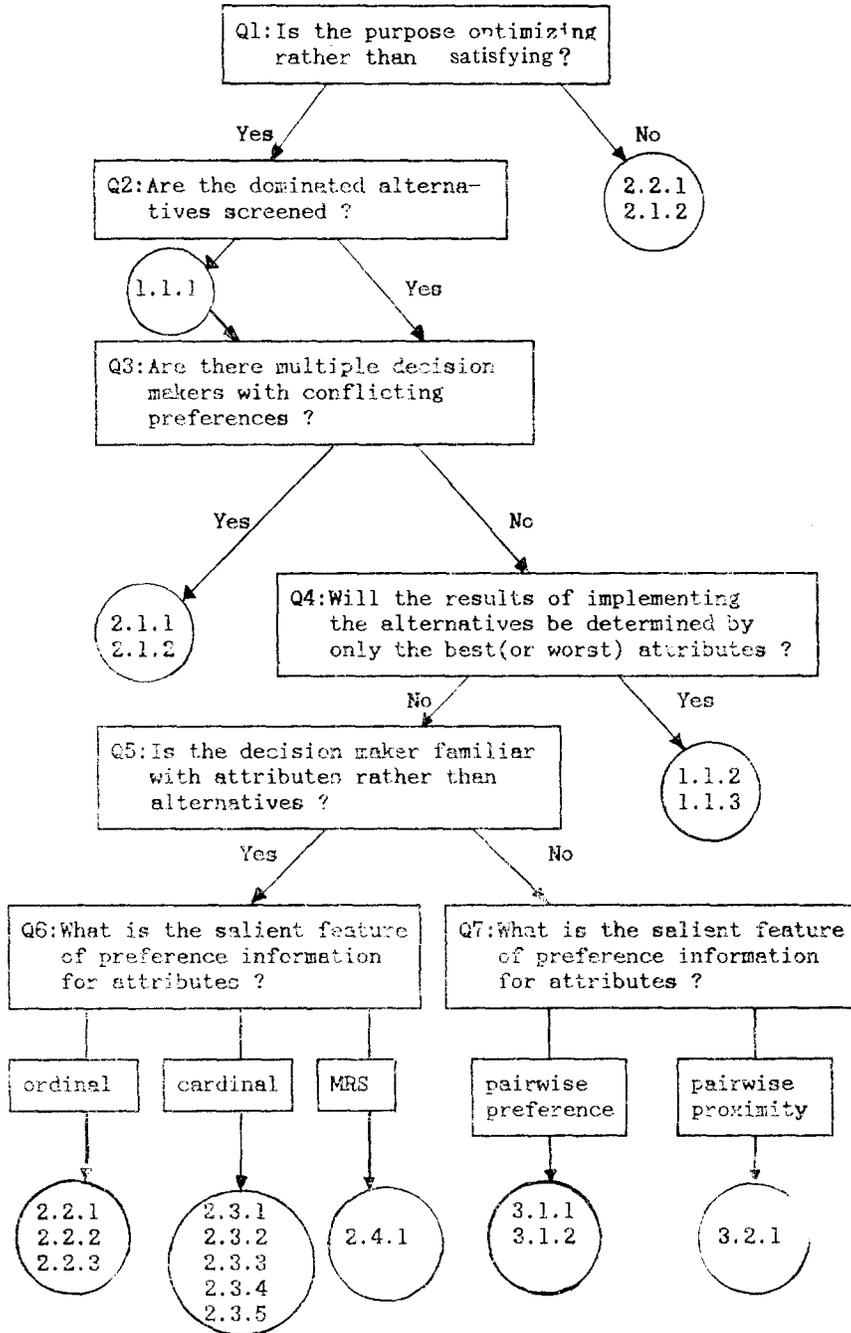


그림 2. MADM method specification chart (#11)

I. Types of Information from the Decision Maker

II. Salient Feature of Information

III. Major Classes of Methods

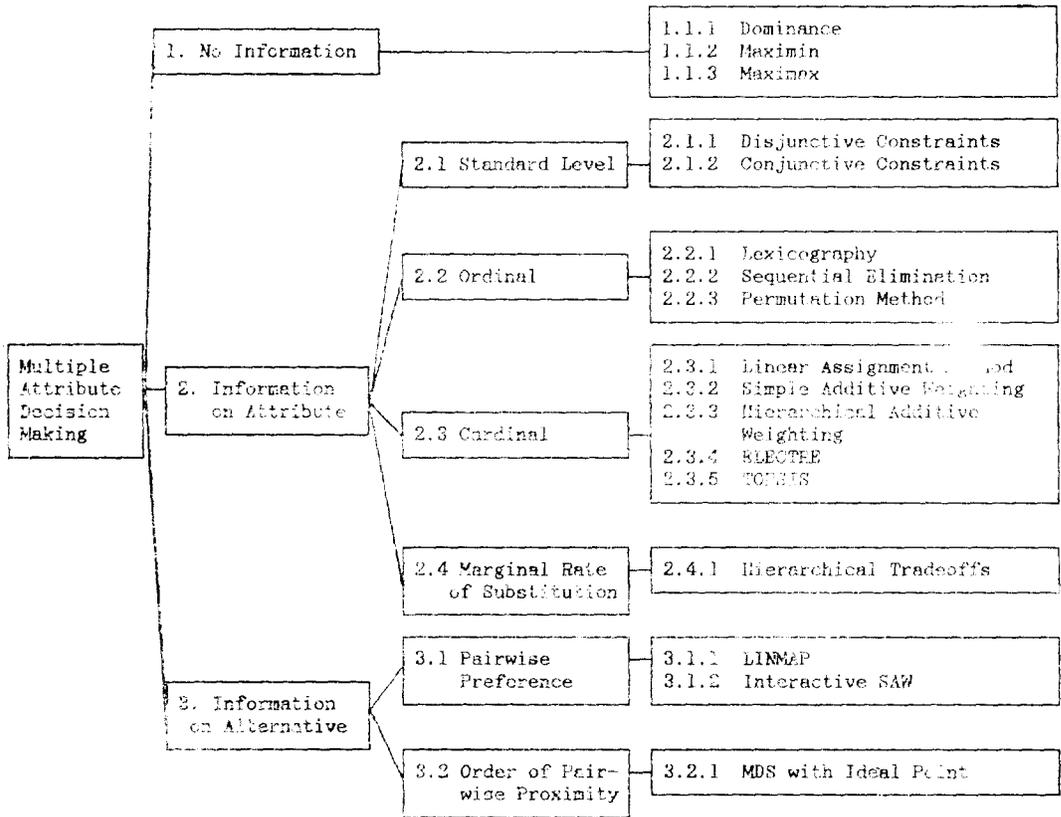


그림 3. A taxonomy of methods for multiple attribute decision making(# 11)

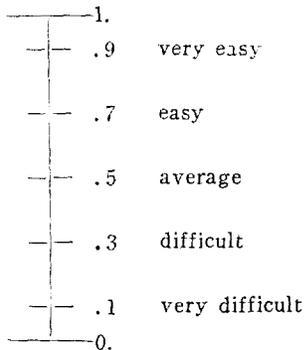


그림 4. Bipolar scale for the qualitative attributes.

도 다음과 같은 恩典의 척도로 轉換되었다.

$$r_{ij} = \frac{1/X_{ij}}{\max_j (1/X_{ij})} = \frac{i X_{ij}^{\min}}{X_{ij}} = \frac{X_j^{\min}}{X_{ij}} \quad (2)$$

比較 가능한 計量的 의사결정 matrix 는 다음과 같이 된다.

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
A ₁	0.11	0.29	0.9	0.3
A ₂	0.11	0.29	0.7	0.5
A ₃	0.34	0.02	0.7	0.5
A ₄	0.34	0.02	0.5	0.7
D = A ₅	0.34	0.02	0.3	0.3
A ₆	1	1	0.5	0.5
A ₇	1	1	0.3	0.7
A ₈	1	1	0.3	0.5
A ₉	0.64	0.44	0.1	0.3

4.2 Conjunctive Constraints(연결된 제한조건들)에 의한 解

Conjunctive DM에서는 모든 基準을 만족시켜야 한다. 따라서, 基準들이 정해지고 단 하나의 代案(alternative)이 모든 基準(standard)들을 만족시킬때까지 반복적으로 그 基準들이 높혀지고 또는 낮혀지곤 한다. 이 方法은 별로 복잡한 分析이 필요하지 않으므로 간단하다.

4.3 Simple Additive Weighting(S.A.W.)方法에 의한 解

이 方法(#7, #8, #13)은 最大加重평균치를 가지고 있는 代案을 찾는다. 의사결정자는 단계적으로 주어진 屬性의 구조를 사용하여 加重值를 判斷한다. 우선 의사결정자(DM)는 4가지 主要分類에 對하여 그 중요도를 評價한 후, 各分類내에서 判斷한다. 그 一連의 評價가 그림 5에 나타나 있다.

評價된 加重值(중요도를 나타냄)와 D matrix(의사결정 matrix)로부터 얻어진 여러 代案들의 加重평균치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{j=1}^4 W_j X_{1j} = 0.361 & A_6 &= 0.75 \\ A_2 &= 0.381 & A_7 &= 0.77 \\ A_3 &= 0.396 & A_8 &= 0.69 \\ A_4 &= 0.416 & A_9 &= 0.39 \\ A_5 &= 0.256 & & \end{aligned}$$

따라서 A₇(Fast Algorithm)이 선택된다.

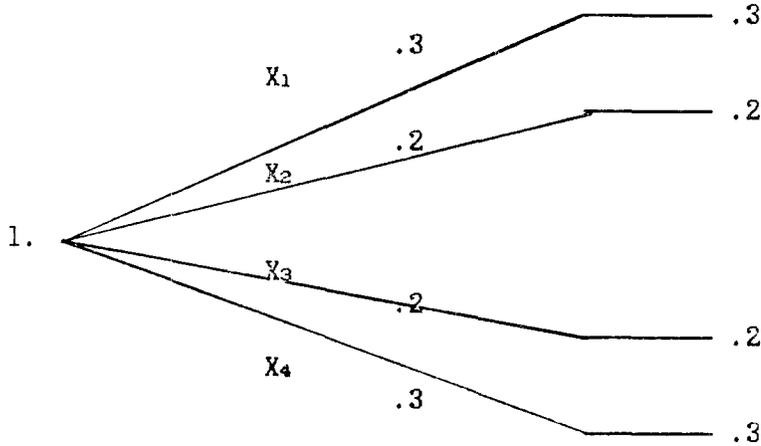


그림 5. Assessment of attribute weights.

4.4 Linear Assignment Method(L.A.M)에 의한 解

이 방법(#6)은 屬性의 交互作用과 結合에 對한 線型補完過程으로 構成된다. 그 過程에서, 計量的 資料보다는, 단지 順序에 의한 資料를 使用한다. 그리고 質的 屬性들은 서로 비교될 必要가 없다. 그 代案들은 表 3에서 그 順位가 分類되어 있다.

이제, a product-attribute matrix π 를 정의하여 보자. Matrix π 의 구성요소 π_{ik} 는 代案 i (i.e., A_i)가 K 번째 屬性에서의 序열을 나타내며, π 는 정방형의 非陰數 行列이다.

서로 다른 加重值 $\underline{W}=(W_1, W_2, W_3, W_4)=(0.3, 0.2, 0.2, 0.3)$ 에 對해서, π 行列의 各各의 값은, 該當되는 代案의 序列에 해당하는 모든 加重值의 合이다. 그 結果가 그림 6에 나타

<표 3> Ranking of Alternatives Attribute

Rank \ Attribute	$X_1(W_1)$	$X_2(W_2)$	$X_3(W_3)$	$X_4(W_4)$
1st	A_6, A_7, A_8	A_6, A_7, A_8	A_1	A_4, A_7
2nd			A_2, A_3	
3rd				A_2, A_3, A_6, A_8
4th	A_9	A_9	A_4, A_6	
5th	A_3, A_4, A_5	A_1, A_2		
6th			A_5, A_7, A_8	
7th		A_3, A_4, A_5		A_1, A_5, A_9
8th	A_1, A_2			
9th			A_9	

For the different Weight $\underline{W}=(W_1, W_2, W_3, W_4)=(.3, .2, .2, .3)$, II matrix becomes

	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
A1	W3				W2	W2	W4	W1 W4	W1 W4
II = A2		W3	W3 W4 W4	W4	W2 W4	W2 W4		W1	W2
	-,	-+-,	-,	-+-,	-+-,	-+-,	-,	-	-
A3	W3	W3 W4 W4	W4	W1 W4	W1 W4	W1 W2 W2	W2	W2	W2
A4	-,	-+-,	-,	-+-,	-+-,	-+-,	-,	-	-
	2	2	4	4	3	4	3	3	3
A5	W4	W4		W3	W1 W3	W1	W1 W2 W2	W2	W2
	-,	-,		-,	-+-,	-,	-+-,	-,	-
A6	2	2		2	3	2	3	3	3
					W1	W1 W3	W1 W2 W2 W3	W2 W4	W2 W4
A7					-,	-+-,	-+-,	-+-,	-+-
					3	3	3	3	3
A8							W2 W3 W4	+-+-,	+-,
							3	3	3
A9									

그림 6-A. Product-attribute matrix II

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A ₁	.2	0	0	0	.1	.1	.1	.25	.25
A ₂	0	.1	.175	.075	.175	.175	0	.15	.15
A ₃	0	.1	.175	.075	.175	.175	.176	.067	.067
A ₄	.15	.15	0	.1	.2	.1	.167	.067	.067
=A ₅	0	0	0	0	.1	.167	.333	.233	.167
A ₆	.167	.167	.242	.175	.175	.075	0	0	0
A ₇	.317	.317	.167	0	0	0	.067	.067	0
A ₈	.167	.167	.242	.075	.075	.142	.067	.067	0
A ₉	0	0	0	.5	0	0	.1	.1	.3

그림 6-B. Product-attribute matrix II (continued)

나 있었다.

π_{ik} 의 값이 크면 클수록, 代案 i (즉 A_i)를 K 번째 序列에 배치하는데 의견이 일치됨을 의미한다. 따라서 문제는 $\sum \pi_{ik}$ 를 最大化시키는 각 K ($K=1, 2, \dots, 9$)에 對하여 A_i (代案 i)을 求하는 것이다.

여기서 permutation matrix P 를——만약 代案 i (*i.e.*, A_i)가 序列 K 에 割當이 되면 $\pi_{ik}=1$ 이고, 그렇지 않다면 $\pi_{ik}=0$ 인——정방형 行列로 정의하자.

線型割當法은 다음과 같은 LP 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Max } & \sum_{i=1}^9 \sum_{k=1}^9 \pi_{ik} \cdot P_{ik} \\ \text{s.t. } & \sum_{i=1}^9 P_{ik} = 1, \quad k=1, 2, 3, \dots, 9 \\ & \sum_{k=1}^9 P_{ik} = 1, \quad i=1, 2, 3, \dots, 9 \\ & P_{ik} \geq 0, \quad \text{for all } i, k \end{aligned}$$

그 結果는(LP package에 의하여)

$$P_{61}=1, \quad P_{36}=1, \quad P_{72}=1,$$

$$P_{57}=1, \quad P_{83}=1, \quad P_{28}=1$$

$$P_{94}=1, \quad P_{19}=1, \quad P_{45}=1$$

나머지는 모두 0이다. 따라서 最適 permutation matrix P^* 는

	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
A ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A ₂	0	0	0	0	0	0	0	1	0
P*=A ₃	0	0	0	0	0	1	0	0	0
A ₄	0	0	0	0	1	0	0	0	0
A ₅	0	0	0	0	0	0	1	0	0
A ₆	1	0	0	0	0	0	0	0	0

A_7	0	1	0	0	0	0	0	0	0
A_8	0	0	1	0	0	0	0	0	0
A_9	0	0	0	1	0	0	0	0	0

즉, 最終序列은 $(A_6, A_7, A_8, A_9, A_4, A_3, A_5, A_2, A_1)$ 이다.

4.5 ELECTRE (Elimination et Choice Translating Reality) 方法에 의한 解

이 方法(#14, #15, #17)은 'Outranking relationship'의 개념을 使用한다. Outranking relationship($A_K \rightarrow A_L$)은 다음과 같다; 두가지의 代案 $K(A_K)$ 와 $L(A_L)$ 이 數學的으로는 서로 非支配的(nondominated)이라 하더라도, 의사결정자는 A_K 가 거의 確實하게 A_L 보다 더 낫다고 간주하는 위험을 堪耐하는 것을 말한다(#18). 다른 代案들의 Outranking relationship을 계속적으로 評價하여, 그 關係에 의해서 支配당한 代案들은 除去될 수 있다. ELECTRE는 Outranking relationship의 機械的인 評價를 위하여 基準(criteria)을 정한다.

ELECTRE 方法은 다음과 같은 段階를 거친다.

1. normalized decision matrix 를 計算한다.

	X_1	X_2	X_3	X_4
A_1	0.6463	0.0453	0.5614	0.2
A_2	0.6463	0.0453	0.4366	0.3333
$R = A_3$	0.2134	0.5758	0.4366	0.3333
A_4	0.2134	0.5758	0.3119	0.4667
A_5	0.2134	0.5758	0.1871	0.2
A_6	0.0715	0.0129	0.3119	0.3333
A_7	0.0715	0.0129	0.1871	0.4667
A_8	0.0715	0.0129	0.1871	0.3333
A_9	0.1119	0.0291	0.0624	0.2

2. 加重值를 부여한 normalized decision matrix 를 계산한다.

$$V = RW$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
$= A_1$	0.6463	0.0453	0.5614	0.2
A_2	0.6463	0.0453	0.4366	0.3333
A_3	0.2134	0.5758	0.4366	0.3333
A_4	0.2134	0.5758	0.3119	0.4667
A_5	0.2134	0.5758	0.1871	0.2
A_6	0.0715	0.0129	0.3119	0.3333
A_7	0.0715	0.0129	0.1871	0.4667
A_8	0.0715	0.0129	0.1871	0.3333
A_9	0.1119	0.0291	0.0624	0.2

0.3	0	0	0
0	0.2	0	0
0	0	0.2	0
0	0	0	0.3

다시 한번 想起하면, X_1 과 X_2 는 費用(cost)와 관련된 屬性이고 X_3 과 X_4 는 恩典(benefit)과 관련된 屬性이다.

3. Concordance(一致)集合과 Discordance(不一致)集合을 결정한다.

代案 K (i.e., A_K)와 代案 L (i.e., A_L)의 一致(Concordance)集合 C_{KL} 은 A_K 가 A_L 보다 選好되는 基準들로 구성된다.

즉 $C_{KL} = \{j | X_{kj} \geq X_{Lj}\}$ 이고 不一致(Discordance) 集合은

$$D_{KL} = \{j | X_{kj} < X_{Lj}\} = J - C_{KL}$$

$C_{12} = \{1, 2, 3\}$	$D_{12} = \{4\}$
$C_{13} = \{2, 3\}$	$D_{13} = \{1, 4\}$
$C_{14} = \{2, 3\}$	$D_{14} = \{1, 4\}$
$C_{15} = \{2, 3, 4\}$	$D_{15} = \{1\}$
$C_{16} = \{3\}$	$D_{16} = \{1, 2, 4\}$
$C_{17} = \{3\}$	$D_{17} = \{1, 2, 4\}$
$C_{18} = \{3\}$	$D_{18} = \{1, 2, 4\}$
$C_{19} = \{3, 4\}$	$D_{19} = \{1, 2\}$
$C_{21} = \{1, 2, 4\}$	$D_{21} = \{3\}$
$C_{23} = \{2, 3, 4\}$	$D_{23} = \{1\}$
$C_{24} = \{2, 3\}$	$D_{24} = \{1, 4\}$
$C_{25} = \{2, 3, 4\}$	$D_{25} = \{1\}$
\vdots	\vdots
$C_{91} = \{1, 2, 4\}$	$D_{91} = \{3\}$
$C_{92} = \{1, 2\}$	$D_{92} = \{3, 4\}$
$C_{93} = \{1, 2\}$	$D_{93} = \{3, 4\}$
$C_{94} = \{1, 2\}$	$D_{94} = \{3, 4\}$
$C_{95} = \{1, 2, 4\}$	$D_{95} = \{3\}$
$C_{96} = \phi$	$D_{96} = \{1, 2, 3, 4\}$
$C_{97} = \phi$	$D_{97} = \{1, 2, 3, 4\}$
$C_{98} = \phi$	$D_{98} = \{1, 2, 3, 4\}$

4. Concordance(一致)行列을 계산한다.

$$C_{12} = \sum W_j = W_1 + W_2 + W_3 = 0.3 + 0.2 + 0.2 = 0.7$$

$$C_{13} = \sum W_j = W_2 + W_3 = 0.2 + 0.2 = 0.4$$

\vdots
etc.,

따라서 Concordance(一致)行列은,

C=1	—	0.7	0.4	0.4	0.7	0.2	0.2	0.2	0.5
2	0.8	—	0.7	0.4	0.7	0.5	0.2	0.5	0.5
3	0.6	0.8	—	0.7	1	0.5	0.2	0.5	0.5
4	0.6	0.6	0.8	—	1	0.5	0.5	0.5	0.5
5	0.6	0.3	0.5	0.5	—	0	0.2	0.2	0.5
6	0.8	0.8	0.8	0.7	1	—	0.7	1	1
7	0.8	0.8	0.8	0.8	1	0.8	—	1	1
8	0.8	0.8	0.8	0.5	1	0.8	0.7	—	1
9	0.8	0.5	0.5	0.5	0.8	0	0	0	—

5. Discordance(不一致)行列(D_x)를 계산한다.

D_x 行列의 구성요소인 d_{KL} 은 다음과 같이 얻어진다.

$$d_{KL} = \frac{\max_{j \in D_{KL}} |V_{Kj} - V_{Lj}|}{\max_{j \in J} |V_{Kj} - V_{Lj}|}$$

$$d_{12} = \frac{0.04}{0.04} = 1$$

$$d_{21} = \frac{0.025}{0.04} = 0.625$$

$$d_{13} = \frac{0.1299}{\max\{0.1299, 0.1061, 0.025, 0.04\}} = \frac{0.1299}{0.1299} = 1$$

$$d_{31} = \frac{0.1061}{0.1299} = 0.8168$$

$$d_{14} = \frac{0.1299}{\max\{0.1299, 0.1061, 0.0499, 0.08\}} = 1$$

$$d_{41} = \frac{0.1061}{0.1299} = 0.8168$$

$$d_{15} = \frac{0.1299}{\max\{0.1299, 0.1061, 0.0749, 0\}} = 1$$

$$d_{51} = \frac{0.1061}{0.1299} = 0.8168$$

$$d_{16} = \frac{0.1724}{\max\{0.1724, 0.0065, 0.0499, 0.04\}} = 1$$

$$d_{61} = \frac{0.0499}{0.1724} = 0.2894$$

⋮
etc.,

不一致(discordance)行列은,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$D_x=1$	—	1	1	1	1	1	1	1	1
2	.625	—	1	1	1	1	1	1	1
3	.8168	.8168	—	1	0	1	1	1	1

4	.8168	.8168	.6225	—	0	1	1	1	1
5	.8168	.8168	1	1	—	1	1	1	1
6	.2894	.1444	.2211	.3552	0	—	1	0	0
7	.4345	.2894	.4432	.2220	0	.625	—	0	0
8	.4345	.2894	.4432	.3552	0	1	1	—	0
9	.6226	.4666	.6837	.7313	.2276	1	1	1	—

6. Concordance dominance matrix 를 결정한다 :

C_{KL} 의 threshold value 을 一致(Concordance) 行에서 구하면, the average concordance index 는

$$\bar{C} = \frac{(.7+.4+.4+\dots+.5+.8)}{9 \times 8} = \frac{43.5}{72} = 0.6042 \text{ 이고 Concordance dominance 行列은}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	—	1	0	0	1	0	0	0	0
2	1	—	1	0	1	0	0	0	0
3	0	1	—	1	1	0	0	0	0
4	0	0	1	—	1	0	0	0	0
F=5	0	0	0	0	—	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	—	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	—	1	1
8	1	1	1	0	1	1	1	—	1
9	1	0	0	0	1	0	0	0	—

7. Discordance dominance matrix 를 결정한다.

d 의 값이 평균 不一致지수(average discordance index)로 정의되며

$$\bar{d} = \frac{(1+0.8168+\dots+1)}{9 \times 8} = \frac{49.4266}{72} = 0.6865$$

Discordance dominance 行列은,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	—	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	—	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	—	0	1	0	0	0	0
4	0	0	1	—	1	0	0	0	0
G=5	0	0	0	0	—	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	—	0	1	1
7	1	1	1	1	1	1	—	1	1
8	1	1	1	1	1	0	0	—	1
9	1	1	0	0	1	0	0	0	—

8. 總括된 dominance matrix(*i.e.*, aggregate dominance matrix)를 決定한다.

行列 F 와 行列 G 를 結合시켜 얻어진 總括行列(aggregate matrix)은 다음과 같다.

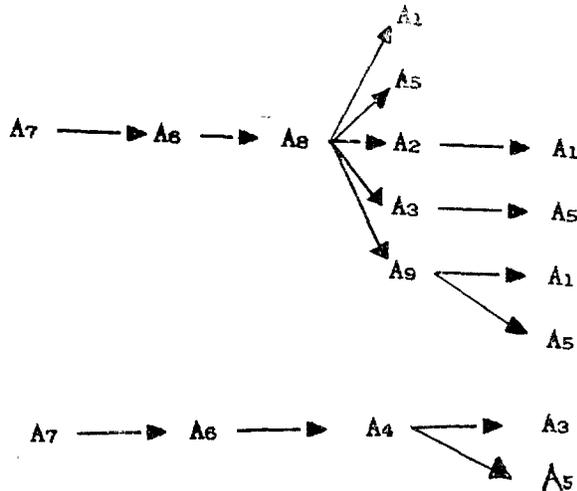
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E=1	—	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	—	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	—	0	1	0	0	0	0
4	0	0	1	—	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	—	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	—	0	1	1
7	1	1	1	1	1	1	—	1	1
8	1	1	1	0	1	0	0	—	1
9	1	0	0	0	1	0	0	0	—

9. 덜 유리한 代案들을 제거한다 :

E 行列은 다음과 같은 over-ranking 關係를 제공한다.

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $A_2 \rightarrow A_1$ | $A_6 \rightarrow A_1$ | $A_7 \rightarrow A_1$ | $A_8 \rightarrow A_1$ |
| $A_3 \rightarrow A_5$ | $A_6 \rightarrow A_2$ | $A_7 \rightarrow A_2$ | $A_8 \rightarrow A_2$ |
| $A_4 \rightarrow A_3$ | $A_6 \rightarrow A_3$ | $A_7 \rightarrow A_3$ | $A_8 \rightarrow A_3$ |
| $A_4 \rightarrow A_4$ | $A_6 \rightarrow A_4$ | $A_7 \rightarrow A_4$ | $A^8 \rightarrow A_5$ |
| | $A_6 \rightarrow A_5$ | $A_7 \rightarrow A_5$ | $A_8 \rightarrow A_9$ |
| | $A_6 \rightarrow A_8$ | $A_7 \rightarrow A_6$ | $A_9 \rightarrow A_1$ |
| | $A_6 \rightarrow A_9$ | $A_7 \rightarrow A_8$ | $A_9 \rightarrow A_5$ |
| | | $A_7 \rightarrow A_9$ | |

위의 關係를 可能한한 結合하면



위의 結果로 부터 $A_7 \rightarrow A_6 \rightarrow A_8$ 關係나 또는 $A_7 \rightarrow A_6 \rightarrow A_4$ 關係는 쉽게 成立됨을 알 수 있다. 또한 다른 關係도 部分的으로 확인될 수 있다. 그러나 簡潔한 關係를 알 수가 없다. 따라서 문

턱값(threshold value)을 더 죄임으로서——즉 C 를 0.8로 올리고, d 는 0.3으로 낮추어——앞서 行한 段階 1에서 段階 5까지 실시한다.

6. Concordance dominance matrix(一致支配行列)은 다음과 같다 :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	—	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	—	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	—	0	1	0	0	0	0
4	0	0	1	—	1	0	0	0	0
F=5	0	0	0	0	—	0	0	0	0
6	1	1	1	0	1	—	0	1	1
7	1	1	1	1	1	1	—	1	1
8	1	1	1	0	1	1	0	—	1
9	1	0	0	0	1	0	0	0	—

7. Discordance(不一致) dominance matrix(行列)은 :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	—	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	—	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	—	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	—	1	0	0	0	0
G=5	0	0	0	0	—	0	0	0	0
6	1	1	1	0	1	—	0	1	1
7	0	1	0	1	1	0	—	1	1
8	0	1	0	0	1	0	0	—	1
9	0	0	0	0	1	0	0	0	—

8. 總括(aggregate) dominance matrix(行列)을 결정한다 :

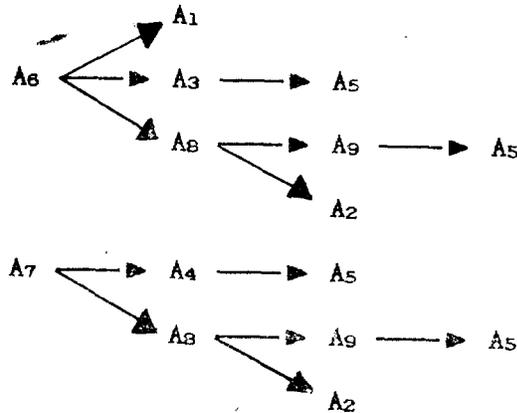
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	—	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	—	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	—	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	—	1	0	0	0	0
E=5	0	0	0	0	—	0	0	0	0
6	1	1	1	0	1	—	0	1	1
7	0	1	0	1	1	0	—	1	1
8	0	1	0	0	1	0	0	—	1
9	0	0	0	0	1	0	0	0	—

9. E 行列로 부터 다음과 같은 overranking relationship 이 도출된다 :

$$\begin{array}{ccccc}
 A_3 \rightarrow A_5 & A_4 \rightarrow A_5 & A_6 \rightarrow A_1 & A_7 \rightarrow A_2 & A_8 \rightarrow A_2 \\
 & & A_6 \rightarrow A_2 & A_7 \rightarrow A_4 & A_8 \rightarrow A_5
 \end{array}$$

$A_6 \rightarrow A_3$ $A_7 \rightarrow A_5$ $A_8 \rightarrow A_9$
 $A_6 \rightarrow A_5$ $A_7 \rightarrow A_8$
 $A_6 \rightarrow A_8$ $A_7 \rightarrow A_9$ $A_9 \rightarrow A_5$
 $A_6 \rightarrow A_9$

이를 綜合하여 체계적으로 나타내면,



쉽게 代案 6(A₆)와 代案 7(A₇)이 다른 代案들보다 낫다는 것을 알 수 있다.

4.6 TOPSIS(Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution)에 의한 解

TOPSIS(#11)는 理想解로의 想對的 接近(relative closeness to the ideal solution)을 取함으로써 理想解와 反理想解(negative-ideal solution)의 距離를 동시에 考慮한다. SAW(Simple Additive Weighting)는 TOPSIS의 特別한 경우이다. 따라서 互意的인 信賴性評價方法이 一連의 TOPSIS 方法으로 選擇된다.

1. Normalized decision matrix 를 計算한다.

A_1	0.6463	0.0453	0.5614	0.2
A_2	0.6463	0.0453	0.4366	0.3333
A_3	0.2134	0.5758	0.4366	0.3333
A_4	0.2134	0.5758	0.3119	0.4667
$R = A_5$	0.2134	0.5758	0.1871	0.2
A_6	0.0715	0.0129	0.3119	0.3333
A_7	0.0715	0.0129	0.1871	0.4667
A_8	0.0715	0.0129	0.1871	0.3333
A_9	0.1119	0.0291	0.0624	0.2

2. 加重值를 考慮한 decision matrix 를 計算한다.

各 屬性의 重要도가 다음과 같이 $\underline{W}=(W_1, W_2, W_3, W_4)=(0.3, 0.2, 0.2, 0.3)$ 로 주어졌다고 가정하자. 그러면 Weighted decision matrix(가중치 의사결정 행렬)은

	X_1	X_2	X_3	X_4
A_1	0.1939	0.0009	0.1123	0.06
A_2	0.1939	0.0091	0.0873	0.10
A_3	0.0640	0.1152	0.0873	0.10
A_4	0.0640	0.1152	0.0624	0.14
A_5	0.0640	0.1152	0.0374	0.06
A_6	0.0215	0.0026	0.0624	0.10
A_7	0.0215	0.0026	0.0374	0.14
A_8	0.0215	0.0026	0.0374	0.10
A_9	0.0336	0.0058	0.0125	0.06

3. 理想解(ideal solution) 및 理想解의 反對(negative-ideal solution)를 決定한다. 두가지 人爲的인(인공의) 代案들 A^* 와 A^- 는 다음과 같이 정의된다.

$$A^*=(\min_i V_{i1}, \min_i V_{i2}, \max_i V_{i3}, \max_i V_{i4})$$

$$=(0.0215, 0.0026, 0.1123, 0.14)$$

$$A^-=(\max_i V_{i1}, \max_i V_{i2}, \min_i V_{i3}, \min_i V_{i4})$$

$$=(0.1939, 0.1152, 0.0125, 0.06)$$

4. Separation measures(分離척도)를 計算한다.

各 代案간의 間격(separation)은 n -dimensional Euclidean distance(n 次元 유클리디안)에 의하여 測定될 수 있다. 各 代案이 理想代案(ideal alternative)과의 間격은 다음과 같이 주어진다.

$$S_i^*=\sqrt{\sum_{j=1}^4 (V_{ij}-V_j^*)^2}, \quad i=1, 2, \dots, 9$$

$S_1^*=0.1902$	$S_4^*=0.1303$	$S_7^*=0.0749$
$S_2^*=0.1789$	$S_5^*=0.1628$	$S_8^*=0.0849$
$S_3^*=0.1293$	$S_6^*=0.0640$	$S_9^*=0.1285$

마찬가지로 negative-ideal solution(反理想解)과의 間격은 다음과 같다.

$$S_i^-=\sqrt{\sum_{j=1}^4 (V_{ij}-V_j^-)^2}, \quad i=1, 2, \dots, 9$$

$S_1^-=0.1457$	$S_4^-=0.1605$	$S_7^-=0.2223$
$S_2^-=0.1358$	$S_5^-=0.1323$	$S_8^-=0.2112$
$S_3^-=0.1551$	$S_6^-=0.2156$	$S_9^-=0.1941$

5. 理想解로의 相對的 接近(relative closeness to the ideal solution)을 計算한다.

代案 i (즉 A_i)와 A^* 와의 相對的 接近은

$$C_1^* = S_1^- / (S_1^* + S_1^-) = 0.4338$$

$$C_2^* = 0.4315$$

$$C_3^* = 0.5454$$

$$C_4^* = 0.5519$$

$$C_5^* = 0.4483$$

$$C_6^* = 0.7711$$

$$C_7^* = 0.7480$$

$$C_8^* = 0.7133$$

$$C_9^* = 0.6017$$

代案 i 가 理想的 代案과 같으면, $C_i^*=1$ 이고, 代案 i 가 反理想的 代案과 같으면 $C_i^*=0$ 이다. 또한 代案 A_i 가 A^* 에 가까울수록, C_i^* 는 1에 接近한다.

〈표 3〉 Comparison of Results by MADM Methods

MADM Methods	Favorably selected alternatives or Ranking									Remarks
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	
Conjunctive Constraints	A ₆									
Simple Additive Weighting	A ₇	A ₆	A ₈	A ₄	A ₃	A ₉	A ₂	A ₁	A ₅	The weighted average value of A ₇ and A ₆ are 0.77 and 0.75
Linear Assignment	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉	A ₄	A ₃	A ₅	A ₂	A ₁	
ELECTRE	A ₇ A ₆ A ₈ — A ₂ or — A ₃ — A ₁ — A ₉ — A ₅ A ₇ A ₆ → A ₄ — A ₃ — A ₅									When the value of c and \bar{d} is taken as the average of corresponding index i.e., $\bar{c}=0.6042$, $\bar{d}=0.6863$
	A ₆ — A ₁ — A ₃ — A ₅ — A ₈ — A ₉ — A ₅ — A ₂ or A ₇ — A ₄ — A ₅ — A ₈ — A ₉ — A ₅ — A ₂									When tightening the threshold value $\bar{c} 0.8$, $\bar{d} 0.3$
TOPSIS	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉	A ₄	A ₃	A ₅	A ₁	A ₂	Very similar ranking to Linear Assignment Method

5. MADM 方法에 의한 結果의 比較

적합한 信賴性 評價方法을 選擇하기 위하여 使用된 Conjunctive Constraints, Simple Additive Weighting Method, ELECTRE Method, 그리고 TOPSIS 의 結果들에 對한 比較가 <表 4>에 나타내어져 있다.

6. 결 과

<表 4>에 나타났듯이, A_6 (Algebraic Extraction method)方法이, Conjunctive Constraints, Linear Assignment Method, 또는 TOPSIS 를 적용했을 때 가장 互意的인 代案으로 나타난 반면에, Simple Additive Weighting 그리고 ELECTRE 方法이 A_7 (Fast Algorithm)에 대한 가장 互意的인 代案으로 추천되었다. 따라서 A_6 또는 A_7 (Fast Algorithm 은 단지 Algebraic Extraction Method 의 확장)이 이 問題에 대한 바람직한 方法으로 選擇된다.

REFERENCES

1. K.K. Aggarwal, J.S. Gupta, K.B. Misra, "Computational time and absolute error comparison for reliability expression derived by various methods," *Microelectronics and Reliability*, Vol. 14, 1975, pp.465~467.
2. K.K. Aggarwal, J.S. Gupta, K.B. Misra, "Reliability evaluation: A comparative study of different techniques," *Microelectronics and Reliability*, Vol. 14, 1975 Feb., pp.49~56.
3. K.K. Aggarwal, J.S. Gupta, K.B. Misra, "A fast algorithm for reliability evaluation," *IEEE Trans. Reliability evaluation*, *IEEE Trans. Reliability*, Vol. R-24, 1975 Apr., pp.33~85.
4. K.K. Aggarwal, S. Rai, "Symbolic reliability evaluation using logical relations," *IEEE Trans. Reliability*, Vol. R-27, 1978 Aug., pp.202~205.
5. ARINC Res. Corp., *Reliability Engineering*, Engiewood Cliffs, N.Y., Prentice Hall, 1964.
6. Bernardo, J.J. and J.M. Blin, "A Programming Model of Consumer Choice among Multi-Attributed Brand," *Journal of Consumer Research*, Vol. 4, No. 2, 1977, pp.111~118.
7. Churchman, C.W. and R.L. Ackoff, "An Approximate Measure of Value," *Journal of the Operation Research Society of America*, Vol. 2, No. 2, 1954, pp.172~187.
8. Fishburn, P.C., "Independence in Utility Theory with Whole Product Sets," *Operations Research*, Vol. 13, No. 1, 1965, pp.28~45.
9. S. Rai, K.K. Aggarwal, "An efficient method for reliability evaluation of a general network," *IEEE Trans. Reliability*, Vol. R-27, 1978 Aug., pp.209~211.

10. Hwang, C.L., A.S.M. Masud, in collaboration with S.R. Paidy and K. Yoon, Multiple Objective Decision Making-Methods and Applications, A State-of the Art Survey, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1979.
11. Hwang, C.L., and K. Yoon, Methods and Applications of Multiple Attribute Decision Making, a research monograph under preparation, 1980.
12. MacCrimmon, K.R., "Improving the System Design and Evaluation Process by the Use of Trade-off Information: An Application to Northeast Corridor Transportation Planning, RAND Memorandum, RM-5877-DOT, 1969.
13. MacCrimmon, K.R., "An Overview of Multiple Objective Decision Making," in J.L. Cochrane and M. Zeleny(eds.), Multiple Criteria Decision Making, pp.18~44, University of South Carolina Press, Columbia, S.C., 1973.
14. Nijkamp, P., "A Multicriteria Analysis for Project Evaluation: Economic-Ecological Evaluation of a Land Reclamation Project," Papers of the Regional Science Association, Vol. 35, 1974, pp. 87~111.
15. Nijkamp, P. and A. van Delft, Multi-Criteria Analysis and Regional Decision-Making, Martinus Nijhoff Social Sciences Division, Leiden, the Netherlands, 1977.
16. Pardee, F.S. et al., "Measurement and Evaluation of Transportation System Effectiveness," RAND Memorandum, RM-5869-DOT, 1969.
17. Roy, B., "Problems and Methods with Multiple Objective Functions," Mathematical Programming, Vol. 1, No. 2, 1971, pp.239~266.
18. Roy, B., "How Outranking Relation Helps Multiple Criteria Decision Making," in J.L. Cochrane and M. Zeleny(eds.), Multiple Criteria Decision Making, pp.179~201, University of South Carolina Press, Columbia, S.C., 1973.