多屬性效用理論에 관한 硏究

- A Study on Multiattribute Utility Theory -

張 有 喆*

目 次

Ⅰ. 緖 論

效用(utility)이란 개념을 어떠한 관점에서 파악하느냐의 문제는 오래 전부터 經濟學에서 논의되어 왔다. 즉, 경제학에 있어 효용을 기초로 效用理論 또는 需要理論이 형성되었다고 하겠으나, 그 형성과정에 있어 처음에는 基數的 效用(cardinal utility)을 중심

* 聖心女子大學 經營學科 助敎授

으로 하는 효용이론이었다. 이것이 19C.말에 왈라스(L.Walras), 마샬(A.Marshall) 그리고 멩거(C.Menger)등 新古典學派에 의해 수립된 限界效用理論(theory of marginal utility)이다. 그러나 그 후 20C.초에 파레토(V.Pareto)와 힉스(J.R.Hicks)등은 효용의 可測性에 대한 전제를 배격하고 序數的 效用(ordinal utility)에 기초하여 無差別曲線理論(theory of indifference curve)을 수립하였다. 사실 이 이론도 효용 가측성의 假定에서 완전히 해방되었다고 볼 수 없으며, 기수적효용을 서수적효용으로 대체한데 불과하다. 이에 兩理論은 相互排他的인 것은 아니며 모두 消費行動 또는 需要를 설명하는데 다같이 유효한 消費者行動理論이라 할 수 있다.

이러한 효용이론들은 危險(risk)이 없는 세계에서의 消費者選擇에 관한 이론이었다. 그러나 제2차대전 이후의 효용이론은 위험이 존재하는 경우에 있어 효용의 문제를 검토하고, 나아가서 위험하에서의 合理的 選擇의 이론적 기초를 마련하는 방향으로 전개되었다. 이 이론은 기원을 18C. 스위스의 베르누이(D.Bernoulli)에서 찾아볼 수 있으며, 이를 기초로 노이만과 몰겐스턴(J.von Neumann & O. Morgenstern)에 의해 수립되었다. 이들은 효용의 가측성을 전제로 期待效用(expected utility)을 危險狀況下에서 決定基準으로 제시하였다. 이로써 의사결정은 단순히 貨幣의 所得價値만의 극대화가 아니라 非貨幣的 目標인 效用에 영향을 받게 됨을 알 수 있다.

이와같이 危險을 고려한 노이만과 몰겐스턴의 효용이론은 다시 基數的 效用을 중심으로 한 것이나, 신고전학파의 기수적 효용과 같은 개념은 결코 아니다. 이는 재화에 대한 滿足의 정도를 측정한다기 보다 오히려 危險이 개입하는 選擇行爲를 설명하는 原理로서 보다 의의가 있다 하겠다. 여하튼 이 이론은 효용의 새로운 국면을 개척함으로써 신고전학파의 기수적 효용이론에 새로운 활력을 부여하였다.

그런데 1970년대 초에 들어와서 효용이론에 또 하나의 큰 변혁이 왔다. 그것은 경영여건이 복잡다기해짐에 따라 의사결정의 목적이 單一目的이 아니라 多目的으로 대체되고, 이에 따라 효용을 규정하는 변수도 單一變數에서 多變量變數로 변화하게 되었다. 이와같은 경우에 우리는 각 변수의 중요도에 따라 加重値를 부여해야 한다. 이러한 문제를 체계적으로 評價하기 위해 제기된 방법이 多屬性效用理論(multiattribute utility theory)이다.

물론 이 이론은 고전적효용이론과 노이만과 몰겐스턴의 효용이론에 바탕을 두지만, 다속성을 다룬다는데 근본적 차이점이 있다. 아직 이론이 초기단계이므로 투자안선택, 대안평가 등 多目的意思決定問題들과 연계되어 제한된 범위에서 이용되고 있으나, 앞으로 이 분야의 발전과 더불어 그 중요성이 더욱 크게 부각될 것으로 전망된다.

따라서 本論文은 多目的意思決定問題를 합리적으로 다루기 위한 이론적 배경이 되는 多屬性效用理論에 대한 기본개념을 고찰하는데 그 目的이 있다.

Ⅱ. 多屬性効用의 基礎概念

1. 多目的意思決定과 多屬性効用

오늘날과 같이 복잡다기한 세상에서의 대부분의 意思決定은 單一目的 혹은 單一屬性만 포함하는 의사결정은 거의 없으며, 多目的 혹은 多屬性(multiple goal or multiple attribute) 形態이다. 따라서 從屬變數가 두 개 이상의 獨立變數에 의해 설명되는 의사결정문제들이 점차 중요하게 되었다.[1)]

그러나 최근까지도 의사결정을 연구하는 學者들도 多目的狀況을 거의 고려하지 않고 있다. 왜냐하면 이를 고려하면 分析技法이 복잡해지고, 또 이 理論이 아직 초기 단계에 있기 때문이다. 다시말하면, 그들은 產出을 한개의 尺度(주로 貨幣)에 의해 測定하고 또 이것을 비교를 위한 기초로 받아들이고 있다. 그러므로 多目的狀況을 다루는 방법, 즉 多目的 내지 多屬性 意思決定方法들이 지난 10여년간 개발되어 왔다.

多目的意思決定問題들은 여러 目的에 의해 설명되는 代案들 간의 選擇을 다룬다. 예를 들면, 여러 目的을 가진 輸送시스템을 설계하는 문제가 있다고 하자. 이 目的들은 輸送費의 極小化, 輸送時間의 極小化, 不便의 極小化 그리고 여러 종류의 遲延의 極小化 등

---

1) Scott F. Richard, "Multivariate Risk Aversion, Utility Independence and Separable Utility Functions," *Management Science*, Vol.22, No.1, Sep.,1975, p.12.

이 있다. 또한 自動車를 선택할 때도 購入費, 馬力, 經濟性 등과 같은 屬性을 고려해야 한다. 이상과 같은 것들이 多目的意思決定問題들이다. 때로는 目的들 간에 혹은 屬性들 간에 相衝(conflict)이 있을 수도 있다. 예컨대, 기업은 費用極大化와 品質의 最大化와 같은 주요 두 가지 目的이 있는데 이 두 目的은 다소 相衝的이다. 어떤 경우에는 모든 目的을 달성할 수도 있지만, 또 다른 경우에는 한 目的에 제한이 따른다.

그러면 이러한 意思決定問題의 最適解는 서로 相衝되는 目的들에 대해 의사결정자의 效用을 極大化하는 것이다. 자연적으로 이 분석은 目的들 간의 相衝 때문에 選好트레이드오프(trade-off)를 동반하게 된다. 이를 위해 多屬性效用分析이 개발되었는데 이것은 노이만과 몰겐스턴에 의해 제시된 假定에 기초를 둔 單一屬性效用理論의 확장이다. 이 분야의 개발은 多目的을 意思決定에 도입하는 필요성으로부터 일어났다. 따라서 多目的에 의해 판단되어야 될 상황을 위해 多屬性效用理論이 제기되었다.[2]

2. 多屬性効用의 接近節次

效用 혹은 心理的 價値(psychological value)는 과거 行動의 評價와 미래의 代案들 간의 選擇을 위한 意思決定의 기초로 사용된다. 이러한 效用은 좋은 것(good deal)과 나쁜 것(bad deal) 간에 구별하는 개념이다.

여러 代案들의 效用을 체계적으로 평가할 필요가 있는 경우가 있다. 예를 들면, 프로그램評價, 費用收益分析, 複雜한 選擇問題 그리고 生産設計決定등이다. 이들은 중요한 여러 變數를 가진 대안들간의 선택을 하는 경우이다. 이와같은 문제들을 위해서 意思決定者가 이용할 수 있는 것이 效用接近法이다. 이 方法은 意思決定과 評價를 하기 위한 기초가 되는 價値構造를 만들기 위해 여러 屬性들을 파악하고 측정하고 그리고 결합하는 과정을 의미한다. 직관적이고 전체적인 基準의 통합이 아니라 이 기법은 문제가 分析되고 또 각 屬性의 效用이 評價되고 나아가서 이런 효용들이 전체로 결합되는 절차이다. 따라서 이 方

---

2) Altan Coner, *Relevance and Application of Multiattribute Theory and Risk Aversion Analysis to Participatory Group Decision Making,* Ph.D. Dissertation, Michigan State University, 1978, pp. 50 ~ 51.

法의 목적은 매우 복잡한 상황하에서 의사결정자에게 그의 選好體系를 이해하게 하는 데 있다.

이러한 效用接近法의 過程은 매우 다양하나 일반적으로 다음과 같은 節次에 따른다.[3)]

1) 먼저 누구를 위한 效用인가를 확인한다 (個人인가 集團인가).

2) 문제의 範圍와 目的을 정한다.

3) 評價하여야 할 代案의 集合을 확인한다.

4) 各代案에 관련되는 要素 혹은 屬性 (factors or attributes) 을 결정한다.

5) 各 屬性의 尺度를 개발한다.

6) 各 屬性의 效用을 도출하기 위한 적당한 기법을 선택한다. 즉, 物理的尺度 (phisical measure) 를 效用이나 價値尺度 (utility or value measure) 로 전환한다.

7) 各 屬性에 대해 각 대안의 效用 또는 價値를 부여한다.

8) 적절한 效用函數模型을 選擇한다.

9) 이 模型을 사용하여 각 代案을 評價한다.

10) 위의 評價로부터 最善의 代案을 選擇한다.

여기서 1) ~ 3) 까지는 效用接近問題를 구성하는 것과 관련된다. 즉, 누구의 效用이냐 어떤 目的을 위한 것이냐 그리고 어떤 代案이 있느냐 등을 파악하는 과정이다. 그리고 4) ~ 5) 는 評價되어야 할 각 代案들에 대한 價値構造를 정의한다. 다시말하면 각 代案에 대한 屬性 또는 次元을 파악한다. 또한 6) ~ 10) 은 최선의 代案을 選擇하기 위해 각屬性의 評價와 이를 결합해서 意思決定基準을 정하는 것과 관련된다.

이러한 效用接近의 過程은 마치 確率을 導出하는 과정과 매우 흡사하며,[4)] 뿐만 아니라 意思決定分析過程과도 매우 비슷한 점이 많다.[5)]

---

3) Edgar M. Johnson & George P. Huber, "The Technology of Utility Assessment," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SMC-7, No.5, May, 1977, pp. 311 ~ 312.

4) C. S. Spetzler and C.S.S. von Holstein, "Probability Encoding in Decision Analysis," *Management Science*, Vol.22, 1975, pp.340 ~ 358.

5) R.A. Howard, "The Foundation of Decision Analysis," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SSC-4, 1968, pp.211 ~ 219.

3. 多屬性效用의 接近方法

效用을 부여하기 위해 여러 가지 技法들이 제안되었고 또 사용되고 있는데, 일반적으로 序列法(ranking method), 範疇法(category method), 直接法(direct method), 갬블法(gamble method) 그리고 無差別法(indifference method)등 5가지의 相互排他的인 방법이 있다.[6]

序列法은 가장 단순한 技法으로 한 要素의 水準을 가장 選好하는 것에서부터 가장 選好되지 않는 것까지 順序를 정하는 것이며,[7] 範疇法은 미리 정해진 구간에 要素의 여러 가지 水準의 價値를 分類하는 방법이다.[8] 그리고 直接法은 요소의 각 수준에 대해 직접 상대적 價値를 부여하는 것이며,[9] 갬블法은 갬블과 危險이 없는 確實한 代案간에 無差別해질 때까지 確率을 변경하거나 要素水準을 변경하는 方法으로 危險이나 不確實性을 명시적으로 고려하는 방법이다.[10] 그리고 마지막으로 無差別法은 두 요소의 結合平面에서 두 屬性을 結合함으로써 平面上에서 無差別한 점과 曲線을 決定하는 것으로 非獨立的인 要素들 간의 效用을 부여하는데 사용할 수 있는 유일한 방법이다.[11]

---

6) P. Fishburn, "Methods of Estimating Additive Utility," *Management Science*, Vol.13, 1967, pp.435 ~ 453.
G. P. Huber, "Methods for Quantifing Subjective Probabilities and Multivariate Utilities," *Decision Science*, Vol.5, 1974, pp.430 ~ 458.

7) J. P. Guilford, *Psychometric Methods*, McGraw-Hill, 1954.
L.L. Thurstone, *The Measurement of Values*, University of Chicago Press, 1959.
W. S. Torgenson, *Theory and Methods of Scaling*, Wiley & Sons, 1958.

8) P. Slovic, "Analyzing the Expert Judge: A Descriptive Study of a Stockbroker's Decision Process," *Journal of Applied Psychology*, Vol.53, 1969, pp.254 ~ 263.

9) S.S. Stevens, *Psychophisics*, Wiley & Sons, 1975.

10) R. Schlaifer, *Probability and Statistics for Business Decisions*, McGraw-Hill, 1959.
R.O. Swalm, "Utility Theory-Insights into Risk Taking," *Harvard Business Review*, Vol.44, 1966, pp.123 ~ 136.

11) K. R. MacCrimmon and M. Toda, "The Experimental Determination of Indifference Curves," *The Review of Economic Studies*, Vol.36, 1969, pp.433 ~ 451.

주어진 문제해결을 위해 어느 기법을 선택해야 하는가에 대한 논의가 많지만, 일반적으로 序列法과 範疇法은 드물게 사용되고, 直接法은 變數간에 獨立的 性質이 있고 危險과 不確實이 고려되지 않은 경우에 사용되며, 갬블法은 危險이 있는 경우에 그리고 無差別法은 變數간에 從屬的 性質이 있을 때 각각 사용된다.

이상의 技法들은 單一屬性에 대한 效用을 부과하기 위해 이용될 수 있다. 이제는 多屬性代案을 위해 이러한 單一屬性 效用을 한 개의 效用評點(utility score)으로 결합하기 위한 方法들을 검토한다.

多目的意思決定을 다루기 위한 기본적인 4종류의 技法이 있다.[12] 즉, 加重法(weighting methods), 遂次消去法(sequential elimination methods), 數理計劃法(mathematical programming methods) 그리고 圖表法(graphical methods) 등이다. 이들을 개관해 보면 다음과 같다.

1) 加重法

A. 推定法(inferred preferences)

a. 線型回歸

b. 分散分析

B. 直接法(directly assessed preferences)

a. 트레이드오프法(trade-off technique)

b. 加算效用(additive utilities)

c. 乘算效用(multiplicative utilities)

d. 맥시민(maximin)

e. 맥시맥시(maximaxi)

2) 遂次消去法

K.R. MacCrimmon and J.K. Siu, "Making Tradeoffs," *Decision Science*, Vol.5, 1974, pp.680 ~ 704.

P. Fishburn, "Independence Tradeoffs and Transformations in Bivariate Utility Functions," *Management Science*, Vol.11, 1965, pp.433 ~ 451.

12) Altan Coner, *op. cit.*, pp.8 ~ 9.

3) 數理計劃法

A. 線型計劃法

B. 非線型計劃法

C. 目的計劃法

4) 圖表法

A, 等選好圖表 (iso-preference graph)

B. 多次元尺度法 (multidimentional scaling)

C. 圖表選好法 (graphical preferences)

그런데 多屬性效用理論은 加重法이라는 것을 쉽게 알 수 있다. 또한 이러한 개관은 여러 의사결정기법들 중에서 多屬性效用理論의 위치를 나타내 준다.

Ⅲ. 多屬性効用理論의 假定

1. 노이만과 몰겐스턴의 公理

不確實性下에서 合理的 選擇의 理論을 전개하기 위해서는 개인의 행동을 적절하게 표시하면서도 어느 누구에게나 合理的 또는 理性的인 것으로 받아들일 수 있는 몇가지 假定(公理)이 필요하다. 즉, 이러한 公理들은 일관성 있는 意思決定을 위한 效用의 존재를 의미하며, 노이만과 몰겐스턴(J. von Neumann and O. Morgenstern)[13] 세베지(L. J. Savage)[14] 루스와 라이파(R.D. Luce and H. Raiffa)[15] 프랫, 라이파 그리고 슈라이퍼(J.W. Pratt, H. Raiffa and R.O. Schlaifer)[16] 그리고 피쉬번(P.C.

---

13) J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, N.J., 1947.

14) L.J. Savage, *The Foundation of Statistics*, Wiley & Sons, New York, 1954.

15) R.D. Luce and H. Raiffa, *Games and Decisions*, Wiley & Sons, New York, 1957.

16) J.W. Pratt, H. Raiffa and R.O. Schlaifer, *Introduction to Statistical Decision Theory*, McGraw-Hill, New York, 1965.

Fishburn)[17] 등에 의해 제시 되었다.

그러나 本論文에서는 期待效用理論을 최초로 公理的接近(axiomatic approach)에 의해 체계적으로 정립해, 일관성 있고 합리적인 행동을 위한 최소한의 필요조건을 제시함으로써 이른바 基數的 效用理論의 기초를 형성한 노이만과 몰겐스턴의 公理에 대해 설명한다. 이와 같은 공리들은 單一屬性效用分析과 多屬性效用分析 모두에 있어 많은 이론적 기초를 제공한다.

1) 不飽和滿足(nonsatiation) : 모든 意思決定者들은 항상 적은 量보다는 많은 量을 좋아한다는 것을 뜻한다.

2) 比較可能性(comparability) : 두 개의 代案 X와 Y에 대하여 X를 Y보다 選好한다(preferred)함은 $X \succ Y$라 쓰고, X보다 Y를 선호한다 함은 $X \prec Y$로 쓰며, X와 Y는 서로 無差別하다(indifferent)함은 $X \sim Y$로 쓴다. 이 公理는 어느 意思決定者에게 주어진 모든 代案에 대하여 서로 비교하여 選好를 항상 표시할 수 있다는 것을 뜻한다.

3) 移行性(transitivity): 이 公理는 意思決定者의 選擇行動은 일관성이 있어야 함을 뜻한다. 가령 어느 意思決定者에게 X, Y, Z 세 개의 代案이 주어졌을 경우 $X \succ Y$ 및 $Y \succ Z$이면 $X \succ Z$이어야 한다. 또는 $X \sim Y$ 및 $Y \sim Z$일 경우 $X \sim Z$임을 뜻한다.

4) 獨立性(independence): Z가 어떠한 결과이든간에 X와 Y가 무차별하게 되면 X 및 Y를 얻게 되는 확률이 같은 이상 두 개의 불확실한 代案은 무차별하다. 즉 $G(X, Z : \alpha)$는 X를 얻게 될 확률이 α, Z를 얻게될 확률이 $1-\alpha$인 불확실한 代案, $G(Y, Z : \alpha)$는 Y를 얻게 될 확률이 α, Z를 얻게 될 확률이 $(1-\alpha)$인 불확실한 代案이라 할 때, 이를 기호로 표시하면 다음과 같다.

$$X \sim Y \rightarrow G(X, Z : \alpha) \sim G(Y, Z : \alpha)$$

5) 繼續性(continuity): 세 개의 代案 X, Y, Z에 대하여 $X \succ Y \succsim Z$ 또는 $X \succsim Y \succ Z$이면 다음의 관계가 성립하는 확률 $\alpha(Y)$가 항상 유일하게 존재한다.

$$Y \sim G[X, Z : \alpha(Y)]$$

이 때 Y는 不確實한 代案 $G[X, Z : \alpha(Y)]$의 確實性等價(certainty equivale-

17) P.C. Fishburn, *Utility Theory for Decision Making*, Wiley & Sons, New York, 1970.

nt) 라고 부른다.

6) 單調性(monotonicity): 어느 세 개의 代案 X, Y, Z에 대하여 $X \succsim Y \succsim Z$, $X \succsim U \succsim Z$이며 다음의 關係式을 만족하는 유일한 $\alpha(Y)$ 및 $\alpha(U)$가 존재한다고 한다.

$$Y \sim G[X, Z : \alpha(Y)]$$

$$U \sim G[X, Z : \alpha(U)]$$

그러면 $\alpha(Y) \geq \alpha(U)$이면 $Y \succsim U$이다. 즉, 더 선호하는 것(X)을 얻게 될 확률이 큰 不確實한 代案 $G[X, Y : \alpha(Y)]$에 대한 확실성등가(Y)를 더 선호하게 된다.

위와 같은 公理體系下에서는 意思決定者의 選好를 일관되게 반영하는 효용이 존재함을 의미한다. 즉 $X \gtrless Y \leftrightarrow U(X) \lesseqgtr U(Y)$를 만족한다. 이렇게 序數的으로 표시된 選好順位를 基數的 效用으로 전환할 수 있다는 논리에서 위의 6가지 公理를 基數的 效用假定이라고도 한다. 또한 不確實한 代案에 대하여 투자자의 選好를 나타내주는 효용은 期待效用과 일치한다. 즉 $U[G(X, Y : \alpha)] = \alpha U(X) + (1-\alpha)U(Y)$가 된다. 따라서 불확실성하에서 最適選擇行動은 期待效用의 極大化 (效用의 分散, 歪度, 尖度 등은 고려할 필요 없음)에 따르게 된다.[18]

2. 選好獨立

이상에서 논의된 公理 외에 세 가지의 중요한 獨立概念 즉, 選好獨立(preference independence), 效用獨立(utility independence) 그리고 加算獨立(additive independence)은 多屬性效用理論을 위한 기본적인 假定들이다. 많은 學者들은 이 개념들을 非統合的(non-integrative) 方法으로 다루었지만, 피쉬번, 키니와 라이파 등은 이들을 體系的이면서도 包括的인 방법으로 분석하였다.[19] 多屬性效用硏究는 이러한 假定들에 바탕을

---

18) 池 淸, 現代財務管理論, 貿易經營社, 1986, pp.91～99.
李弼商, 財務論, 博英社, 1984, pp.217 ～ 225.

19) P.C. Fishburn, "Independence in Utility Theory with Whole Product Sets," *Operations Research*, 13, 1965, pp.28 ～ 45.
R.L. Keeney and H. Raiffa, *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, Wiley & Sons, 1976, pp.219 ～ 231.

두기 때문에 이들을 상세하게 고찰하고자 한다.

우선 選好獨立의 개념을 살펴보고 이어서 效用獨立과 加算獨立을 논하고자 한다. 이러한 개념들을 살펴보기 위해 먼저 다음과 같이 용어를 정의한다.

1) 屬性(attributes) : 屬性은 $X_1, X_2, \cdots, X_n$으로 나타내며, X_i는 벡터屬性(vector attribute) 혹은 스칼라屬性(scalar attribute)이다.

2) 屬性의 集合(sets of attributes) : 屬性 **X**의 集合은 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$으로 표시한다. 그리고 만약 **Y**가 **X**의 部分集合이라면 ($\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$), **Y**에 있는 屬性의 集合을 단순히 屬性 **Y**라고 한다.

3) 餘屬性(complementary sets) : **X**가 X_i와 X_j의 두 屬性으로 분리된다면, X_i와 X_j는 서로 餘屬性이라 한다. 또한 X_i의 餘屬性은 $X_{\bar{i}}$라고 표기한다.

4) 結果(consequences) : 結果空間($X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$)은 有限次元 유크리드 空間(finite-dimentional Euclidean space)의 部分集合을 나타낸다. 結果들은 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$으로 나타내며, x_i는 X_i ($i = 1, 2, \cdots, n$)의 특정치이다.

이상으로부터 選好獨立의 개념을 정의할 수 있다. 만약 選好가 屬性 X_i의 수준에 의해서만 변하고 X_i의 餘屬性 $X_{\bar{i}}$에 의해서는 영향을 받지 않을 경우, X_i는 $X_{\bar{i}}$와 選好獨立이라 한다. 다시말하면 餘屬性들은 選好에 영향을 주지 않으며 오직 X_i에 의해서만 選好가 달라진다. 여기서 우리는 確實한 경우의 結果(consequences)에 대한 選好만을 고려하고 不確實한 경우의 로터리(lottery)에 대한 選好는 고려하지 않는다. 또한 이것은 序數的 效用(ordinal utility)과 관련되는 개념이다. 이 假定을 기호로 표시하면 다음과 같다.

$$(x_i, x_{\bar{i}}) \succsim (x_i', x_{\bar{i}}) \rightarrow (x_i, x_{\bar{i}}') \succsim (x_i', x_{\bar{i}}')$$

또한 이 개념을 (X_i, X_j)에 확장하면, 만약 $X_{\bar{i}\bar{j}} = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots X_{j-1} \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n$이라 할 때 X_{ij}에 대한 選好가 $X_{\bar{i}\bar{j}}$ 수준에 영향을 받지 않는다면 X_{ij}는 $X_{\bar{i}\bar{j}}$와 選好獨立이라고 할 수 있다. 이것은 確實性下에서 여러 X_i와 X_j간의 트레이드오프가 $X_{\bar{i}\bar{j}}$에 의존하지 않는다는 假定과 동일하다. 즉, 選好獨立의 假定은

$X_i \times X_j$ 상의 無差別曲線이 $X_{\overline{ij}}$ 의 값에는 상관하지 않고 같다는 것을 의미한다.[20]

이상에서 살펴본 選好獨立의 개념을 일반화하면 다음과 같다. 만약 確實性下에서 結果에 대한 選好順位가 $\overline{\mathbf{Y}}$의 수준에는 영향을 받지 않고 오직 $\mathbf{Y}$ ($\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$) 에만 영향을 받을 때 屬性 $\mathbf{Y}$는 屬性 $\overline{\mathbf{Y}}$와 選好獨立이다. 결국 選好獨立은 $\mathbf{Y}$에 대한 條件附無差別曲線(conditional indifference curve)이 屬性 $\overline{\mathbf{Y}}$와는 관련되지 않는다는 것을 의미한다.[21]

그런데 屬性간에 이와 같은 選好獨立의 가정이 성립하면,

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} K_i V_i(x_i)$$

와 같은 加算型價値函數(additive value function),[22] 다시말하면 序數的 效用函數(ordinal utility function)가 존재한다.[23]

3. 效用獨立

多屬性效用理論의 기본적 假定 중의 또하나는 效用獨立이다. 多屬性效用理論에서 이것은 마치 多變量確率理論(multivariate probability theory)에서 確率獨立(probability independence)[24] 과 유사하며, 또한 效用獨立의 개념은 앞에서 살펴본 選好獨立

---

20) R.L. Keeney, "The Art of Assessing Multiattribute Utility Functions," *Organizational Behavior and Human Performance*, 19, 1977, p. 271.

21) R.L. Keeney and H. Raiffa, *op. cit.*, p. 284.

22) 效用函數(utility function)은 價値函數(value function)가 되지만 價値函數는 반드시 效用函數라고 할 수 없다. 일반적으로 價値函數는 序數的 效用函數(ordinal utility functions), 選好函數(preference functions), 마샬의 效用函數(Marshallian utility functions), worth functions 그리고 even utility functions 등을 의미하고 效用函數는 基數的 效用函數(cardinal utility functions), 노이만 效用函數(Neumann utility functions), 確率效用函數(probability utility functions) 그리고 단순히 效用函數(utility function)등을 가리킨다.

23) Altan coner, *op. cit.*, p. 53.

24) 變數가 確率的인 의미에서 관련성이 없다는 것은 어떤 특정 값을 취하는 한 變數의 確率이 다른 특정값을 취하는 다른 變數의 確率과는 獨立이라는 뜻이다. 즉, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$을 結合頻度函數(joint frequency function), $f_i(x_i)$를 x_i의 頻度函數라 할 때, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$이 성립하면 變數 $x_1, x_2, \cdots x_n$은 獨立的으로 分布한다.

개념의 特別한 경우라 할 수 있다. 그리고 選好獨立이 序數的 選好와 관련되는데 반해 效用獨立은 基數的 選好와 관련된다.[25]

먼저 두 屬性인 경우에 대한 效用獨立의 개념을 정의하고 나아가서 일반적 개념으로 확장하고자 한다. 屬性 X가 Y와 Z의 두 屬性일 경우, Z가 어떤 특정값을 취할 때 Y에 대한 로터리(lottery)의 條件附選好(conditional preference)가 Z의 수준에 영향을 받지 않을 때 Y는 Z와 效用獨立이라 한다. 이 정의로부터 Z의 특정한 값 Z'에 대해 만약 $U(y, z) = g(z) + h(z)\, U(y, z')$가 성립하면 Y는 Z와 效用獨立임을 알 수 있다.

이제 이를 일반적 개념으로 확장하면, 만약 X_i가 어떤 값에 고정일 때 $X_{\bar{i}}$의 로터리에 대한 選好가 $X_{\bar{i}}$와 관련이 없다면 X_i는 $X_{\bar{i}}$와 效用獨立이라 한다.[26] 그러므로 $U_i(x_i)$를 $X_{\bar{i}}$가 고정되었을 때 條件附效用函數(conditional utility function)라 할 때, 만약 $U(x_i, x_{\bar{i}}) = g(x_{\bar{i}}) + h(x_{\bar{i}})\, U_i(x_i)$이 성립한다면 X_i는 $X_{\bar{i}}$와 效用獨立이다.[27]

이 效用獨立의 假定에 대한 주요 結果는 다음과 같이 요약될수 있다. 즉 $n \geq 2$일때, 만약 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 相互效用獨立(mutually utility independence)이라면, 效用函數는 加算型效用函數(additive utility function)

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_n) = U(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} K_i U_i(x_i)$$

이거나 혹은 乘算型效用函數(multiplicative utility function)

$$1 + KU(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} [\, 1 + KK_i U_i(x_i)\,]$$

---

25) Altan Coner, *op.cit.*, p.53.

26) R.L. Keeney and H. Raiffa, *op.cit.*, pp.224 ~ 225.

27) 效用獨立의 또다른 개념은 X_i와 $X_{\bar{i}}$가 效用獨立이면, 效用函數 $U(\cdot, x_{\bar{i}})$는 戰略的 等價(strategically equivalent)라는 것을 의미한다. 즉 이 함수는 $X_{\bar{i}}$가 어떤 값으로 고정될 때 X_i에 대한 條件附效用函數에 대한 陽의 線型轉換(positive linear transformation)을 나타내므로 어떤 두 로터리에 대해서도 같은 選好順位를 나타내게 된다.

중의 하나이다.[28] 또한 이러한 것은 X_i 가 $X_{\bar{i}}$ 와 效用獨立이고 동시에 (X_i, X_j) 가 $X_{\bar{i}\bar{j}}$ 와 選好獨立인 경우에도 역시 성립한다.[29]

이러한 效用獨立假定의 重要性은 여러 屬性 중 한 屬性에 대한 效用函數(single utility function)에 대해 언급할 수 있는 必要充分條件이 되기 때문이다. Y와 Z가 效用獨立일 때 Y에 대한 效用函數가 존재한다. 그리고 Y와 Z가 效用獨立이 아닐 때 Y에 대한 效用函數를 말하는 것은 意味가 없으며 效用函數 $U(\cdot,\cdot)$의 導出은 더욱 어렵게 된다. 또한 이 경우에는 $Z=z'$일 때와 $Z=z''$일때 Y에 대한 條件附效用函數, 즉 $U(\cdot, z')$와 $U(\cdot, z'')$는 戰略的等價가 아니다.

또한 定義에 의하면, 만약 Y와 Z가 效用獨立이면 Y는 Z와 選好獨立이다. 그러나 그 逆은 반드시 참이라고 할 수 없다. 이러한 관계는 不確實性을 포함하지 않은 退化로터리(degenerate lottery)[30]는 結果(consequence)와 같다는 것에 주목하면 알 수 있다. 그러므로 選好獨立條件은 退化로터리에 대한 選好順位에만 언급되고 效用獨立條件은 모든 로터리에 사용된다. 이와 같이 볼 때, 效用獨立이 選好獨立보다 더 强한 條件이라 할 수 있으며 集合槪念으로는 效用獨立의 개념은 選好獨立의 特別한 경우라 하겠다.[31]

4. 加算獨立

加算型效用函數(additive utility function) 즉, $U(y,z) = K_yU_y(y) + K_zU_z(z)$ 형태를 갖은 效用函數는 總效用을 얻기 위해 Y에서 얻은 效用과 Z에서 얻은 效用을 합하면 된다. 즉 $K_yU_y(y)$과 $K_zU_z(z)$가 서로 독립적이면서 Y에서 얻은 效用이 Z에 아무런 영향을 받지 않으며, 또 Z에서 얻은 效用도 Y와 아무런 관계가 없다는 것이다. 加算型效用函數는 실제문제를 해결하는데 적절하고 또 상대적으로 단순하기 때문에 多屬

28) Altan Coner, *op.cit.*, pp. 53 ~ 55.

29) R.L. Keeney and H. Raiffa, *op.cit.*, p. 344.

30) 退化로터리는 한 개의 結果에 대해 대응된 確率을 가질 때, 그리고 非退化로터리(nondegenerate lottery)는 두 개 이상의 結果에 대해 각각 대응된 確率을 가질 때를 의미한다.

31) R.L. Keeney and H. Raiffa, *op.cit.*, p. 225.

性效用函數 중에서 가장 잘 알려져 있고 또 중요하다.

이와같은 加算型效用函數는 Y와 Z가 相互效用獨立(mutually utility independence)임을 의미한다. 그러나 그 逆인 相互效用獨立은 效用函數가 가산적이라는 것을 의미하지는 않는다.[32] 加算型效用函數가 존재하기 위한 必要充分條件은 加算獨立(additive independence)의 개념을 이용해야 한다. 불행히도 이 용어는 보편적으로 통용되는 것이 아니며, 여기에서 加算獨立이라고 하는 것은 다른 文獻에서는 단순히 獨立이라고 언급되어 왔다. 그러나 加算을 덧붙인 것은 이미 소개한 다른 獨立條件과 구별짓기 위해 필요하다.

먼저 Y, Z의 두 屬性인 경우의 加算獨立概念을 살펴보자. 만약 Y×Z에 대한 結合確率分布(joint probability distribution)에 의해 정의된 두 로터리의 選好比較가 그들의 周邊確率分布(marginal probability distribution)에만 의존한다면 屬性 Y와 Z는 加算獨立이다. 예컨대, 만약 Y와 Z가 加算獨立이라면 다음과 같은 두 로터리의 選好가 같아야 한다.

다시말하면 $U[\frac{1}{2}(y, z)+\frac{1}{2}(y', z')] \sim U[\frac{1}{2}(y, z')+\frac{1}{2}(y', z)]$이다. 이 두 로터리간의 유일한 차이점은 Y의 값들이 어떻게 결합되었는가이다. 만약 누가 그와같은 로터리에 대해 無差別하다면, 그는 加算型效用函數를 갖게 된다.

이제 이를 n개 屬性인 일반적 개념으로 확장하면, 만약 $X_1, X_2, \cdots, X_n$으로 이루어

---

32) 예컨대, 만약 $U(y, z) = y^{\alpha} z^{\beta} (1 \leq y \leq 10,\ 1 \leq z \leq 10)$이라면, y와 z는 相互效用獨立이지만 U(y, z)는 加算型이 아니다. 양변에 對數를 취하면, 우리는 $\log U(y, z) = \alpha \log y + \beta \log z$를 얻으며 이것은 확실히 加算型이다. 그러나 이 $\log U(y, z)$는 效用函數가 아니다. 왜냐하면 이것은 U(y, z)의 陽의 線型轉換이 아니기 때문이다. 한편 $\log U(y, z)$는 結果(y, z)의 選好順位를 유지시켜 주므로 價値函數이다.

진 로터리에 대한 選好가 그들의 周邊確率分布에만 의존한다면 n개의 屬性 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$은 加算獨立이다. 다시말하면 選好가 n개에 屬性의 結合確率分布에 의존하지 않는다는 假定이다.33) 加算獨立의 基本的 結果는 다음과 같은 定理로 요약 되어진다. 즉, 만약 屬性 X_i ($i = 1, 2, \cdots, n$)가 서로 加算獨立이라면

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_n) = U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} K_i U_i(x_i)$$

와 같은 加算型效用函數가 존재한다.

Ⅳ. 多屬性効用函數의 模型

1. 多屬性效用函數의 類型

앞에서 우리는 多屬性效用理論에서 필요한 여러 가지 假定의 개념을 살펴 보았다. 여기에서는 이와 같은 假定하에서 效用函數模型은 어떤 形態를 갖는지에 대해 고찰하고자 한다. 일반적으로 多屬性效用函數의 模型은 加算型, 乘算型 그리고 多線型의 세가지 형태를 갖게 된다.

먼저 n개 屬性 加算型效用函數(additive utility function)에 대해 논하고자 한다. 加算型效用函數는 피쉬번(P.C. Fishburn)에 의해 많은 研究가 이루어졌다.34) 그는 여러 상황하에서 加算型效用函數를 위한 必要充分條件을 도출하였다. 또한 폴락(R.A.

33) R.L. Keeney and H. Raiffa, *op.cit.*, pp.229 ~ 232.
Altan Coner, *op.cit.*, pp.55 ~ 56.

34) P.C. Fishburn, *Decision and Value Theory*, Wiley & Sons, New York, 1964.
__________, "Independence in Utility Theory with Whole Product Sets," *Operations Research*, 13, 1965, pp.28 ~ 45.
__________, "Additivity in Utility Theory with Denumerable Product Sets," *Econometrica*, 34, 1966, pp.500 ~ 503.
__________, "Independence and Additivity in Multivariate, Unidimentional Expected Utility Theory," *International Economic Review*, 8, 1967, pp.335 ~ 342.

Pollak)[35] 도 效用函數가 加算型이 되기 위한 必要充分條件을 제시하였다. 그러나 여기에서는 피쉬번의 加算獨立條件을 중심으로 서술하고자 한다.

만약 屬性 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 에 관한 로터리의 選好가 그들의 周邊確率分布에 의존하고 그들의 結合確率分布에는 영향을 받지 않는다면, 즉 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 이 加算獨立이라면 이때 效用函數는

$$U(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} K_i U_i(x_i)$$

와 같이 加算型으로 표현된다.[36]

그리고 乘算型效用函數(multiplicative utility function)는 키니(R.L. Keeney)에 의해 많은 硏究가 이루어졌다.[37] 그는 만약 n개 屬性 $X_1, X_2, \cdots, X_n$의 각 屬性이 그것의 餘屬性과 效用獨立이라면, 즉 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 이 相互效用獨立이라면 效用函數는

$$U(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} K_i U_i(x_i) + K \sum_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n} K_i K_j U_i(x_i) U_j(x_j) + K^2 \sum_{\substack{i=1 \\ j>i \\ l>j}}^{n} K_i K_j K_l U_i(x_i) U_j(x_j) U_l(x_l) + \cdots + K^{n-1} K_1 K_2 \cdots K_n U_1(x_1) \cdots U_n(x_n)$$

와 같이 된다고 하였다.

그런데 $\sum_{i=1}^{n} K_i = 1$ 일때 $K = 0$ 가 되고 나아가서 加算型效用函數,

___ ____________, "Additive Utilities with Incomplete Product Sets: Application to Priorities and Assignments," *Operations Research*, 15, 1967, pp. 537 ~ 542.

35) R.A. Pollok, "Additive von Neumann-Morgenstern Utility Functions," *Econometrica*, 35, 1967, pp. 485 ~ 494.

36) 만약 세 屬性인 경우, 즉 X_1, X_2, X_3 간에 加算獨立의 假定이 성립한다면, 效用函數는 $U(x_1, x_2, x_3) = K_1U_1(x_1) + K_2U_2(x_2) + K_3U_3(x_3)$ 가 된다.

37) R.L. Keeney, Multiplicative Utility Functions, *Operations Research*, 22, 1974, pp. 22 ~ 34.

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} K_i U_i(x_i)$$

가 된다. 한편 $\sum_{i=1}^{n} K_i \fallingdotseq 1$ 이면 $K \fallingdotseq 0$ 이고, 兩邊에 K를 곱하고 1을 더하여 因數分解를 하면,

$$KU(x)+1 = \prod_{i=1}^{n} [KK_i U_i(x_i) + 1]$$

을 얻는다.

여기서 K가 陽數이면, $U'(x) = 1+KU(x)$ 그리고 $U_i'(x_i) = 1+KK_iU_i(x_i)$ 라면, $U'(x) = \prod_{i=1}^{n} U_i'(x_i)$ 가 되고, 또한 K가 陰數라면, $U'(x) = -[KU(x)+1]$ 그리고 $U_i'(x_i) = -[1+KK_iU_i(x_i)]$ 라면 $-U'(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} U_i'(x_i)$ 가 된다. 따라서 위의 식을 乘算型效用函數라고 한다.[38]

또한 多線型效用函數(multilinear utility function)는 피쉬번[39] 과 파쿠아(P. H. Farquhar)[40] 에 의해 많이 연구되었는데, 그들의 硏究結果는 다음과 같이 요약할 수 있다.

즉 屬性의 集合 $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 에 대해 만약 X_i 가 $X_{\bar{i}}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$)와 效用獨立이라면, 效用函數는

---

38) 만약 세 屬性인 경우에 X_1 이 $\{X_2, X_3\}$ 와 效用獨立이고 $\{X_1, X_2\}$ 와 $\{X_1, X_3\}$ 가 X_3 와 X_2 와 각각 選好獨立이라면, 效用函數는 $U(x_1, x_2, x_3) = K_1U_1(x_1) + K_2U_2(x_2) + K_3U_3(x_3) + KK_1K_2U_1(x_1)U_2(x_2) + KK_1K_3U_1(x_1)U_3(x_3) + KK_2K_3U_2(x_2)U_3(x_3) + K^2K_1K_2K_3U_1(x_1)U_2(x_2)U_3(x_3)$ 가 된다. 여기서 $K \fallingdotseq 0$ 이면 양변에 K를 곱하고 1을 더하여 因數分解하면, $KU(x_1, x_2, x_3) + 1 = \prod_{i=1}^{3} [KK_iU_i(x_i) + 1]$ 을 얻는다.

39) P.C. Fishburn, "Bernoullian Utilities for Multiple Factor Situations," in *Multiple Criteria Decision Making*, J.L. Cochrane and M. Zeleny, eds., University of South Carolina Press, 1973.

40) P.H. Farquhar, "A Fractional Hypercube Decomposition Theorem for Multiattribute Utility Functions," *Operations Research*, 23, 1975, pp. 941 ~ 967.

$$U(x)=\sum_{i=1}^{n}K_iU_i(x_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}K_{ij}U_i(x_i)U_j(x_j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{l>j}K_{ijl}U_i(x_i)U_j(x_j)U_l(x_l)+\cdots+K_{12\cdots n}U_1(x_1)U_2(x_2)\cdots U_n(x_n)$$

와 같이 多線型으로 된다.[41]

이 多線型模型은 加算型效用函數와 乘算型效用函數의 一般型이라 할 수 있다. 다시말하면 加算型效用函數와 乘算型效用函數는 모두 이것의 特別한 경우라 할 수 있다. 따라서 效用函數의 模型에 대해서 다음과 같은 定理로 結論지을 수 있다. 즉, $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$, $n\geq 3$이라 할 때, 만약 X_1에 대해 $\{X_1, X_j\}$가 $X_{\overline{1j}}$ $(j\neq 1)$와 選好獨立이고 X_2가 $X_{\overline{2}}$와 效用獨立이라면, 效用函數는 加算型

$$U(x)=\sum_{i=1}^{n}K_iU_i(x_i),\quad(\sum K_i=1)$$

이거나 혹은 乘算型

$$1+KU(x)=\prod_{i=1}^{n}[1+KK_iU_i(x_i)],\quad(\sum K_i\neq 1)$$

으로 된다.

그런데 加算型效用函數는 위에서 살펴본 高次線型加算模型(linear additive with higher order function)외에도 單純線型加算模型(simple linear additive model) $U(x)=\sum_{i=1}^{n}K_ix_i$ 와 相互作用이 있는 線型加算模型(linear additive with interaction) $U(x)=\sum_{i=1}^{n}K_ix_i+\sum_{i,j=1}^{n}K_{ij}x_ix_j$ 등의 형태가 있다. 前者는 獨立變數들이 각 屬性의 物理的 尺度(phisical measures)로 나타나며 가장 단순한 模型이다. 이 模型은 職務評價(job evaluation)를 위해 네일러와 웨리(J.C. Naylor and R.J. Wherry)[42]가 이용하여 豫測性이 높다는 것을 발견했다. 이외에도 킬리와 도헬티(S.M. Keeley and M.E.

---

41) 만약 세 屬性 X_1, X_2, X_3가 각각 그들의 餘屬性과 效用獨立이라면, 效用函數는

$$\begin{aligned}U(x_1,x_2,x_3)=&K_1U_1(x_1)+K_2U_2(x_2)+K_3U_3(x_3)+K_{12}K_1K_2U_1(x_1)U_2(x_2)\\&+K_{13}K_1K_3U_1(x_1)U_3(x_3)+K_{23}K_2K_3U_2(x_2)U_3(x_3)\\&+K_{123}K_1K_2K_3U_1(x_1)U_2(x_2)U_3(x_3)\end{aligned}$$

가 된다.

42) J.C. Naylor and R.J. Wherry, "The Use of Simulated Stimuli and the JAN Technique to Capture and Cluster the Politics of Raters," *Educational and Psychological Measurement*, Vol.26, No.4, Winter, 1965.

Doherty)[43] 바우만(E.H. Bauman),[44] 그리고 쿤레우더(H. Kunreuther)[45]등도 이 模型을 사용하여 위와 같은 結果를 얻었다. 그리고 後者는 屬性들간의 相互作用이 있는 좀 더 복잡한 模型으로 스로빅, 프라이스너 그리고 바우만(P. Slovic, D. Fleisnner and W.S. Bauman)[46] 에 의해 사용되어 前者보다 다소 좋다는 것을 발견했다.

한편 乘算型은 후버, 샤니 그리고 포드(G. Huber, V. Sahney and D. Ford)[47] 그리고 아이혼(H.J. Eihorn)[48] 에 의해 연구되었으며, 그 결과는 많은 乘算型效用函數模型이 개발되어 왔지만 實際硏究에 이용된 경우는 많지 않다. 따라서 주로 加算型을 이용하는데, 이는 이 模型의 假定이 너무 강하다는 短點도 있으나 역시 상대적 單純性이란 長點이 있기 때문이다.[49]

2. 파라미터 推定法

效用函數의 파라미터(parameter)를 추정하기 위한 방법은 意思決定者(decision maker)가 직접 혹은 간접으로 추정하는 경우와 分析者(analyst)가 多變量統計分析(mul-

---

43) S.M. Keeley and M.E. Doherty, "Baysian and Regression Modeling of Graduate-Admission Policy," *Organizational Behavior ard Human Performance*, Vol.8, No.2, October, 1972.

44) E.H. Bauman, "Consistency and Optimality in Managerial Decision Making," *Management Science*, Vol. 9, No.2, January, 1963.

45) H. Kunreuther, "Extension of Bauman's Theory on Managerial Decision Making," *Management Science*, Vol.15, No.8, April, 1969.

46) P. Slovic, D. Fleisnner and W.S. Bauman, "Analyzing the Use of Information in Investment Decision Making: A Methodological Proposal," *Journal of Business*, Vol.45, No.2, April, 1972.

47) G. Huber, V. Sahney and D. Ford, "A Study of Subjective Evaluation Models," *Behavioral Science*, November, 1969.

48) H.J. Einhorn, "Expert Judgment and Mechanical Combination," *Organizational Behavior and Human Performance*, Vol.7, No.1, February, 1972.

49) C.S. Spetzler, "The Development of a Corporate Risk Policy for Capital Investment Decisions," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SSC-4, 1968, pp.279 ~ 300.

tivariate statistical analysis)을 통해 도출하는 경우 등 두 가지가 있다. 前者를 意思決定者推定法(client-explicated estimation)이라 하고 後者를 分析者推定法(observer-derived estimation)이라 한다.

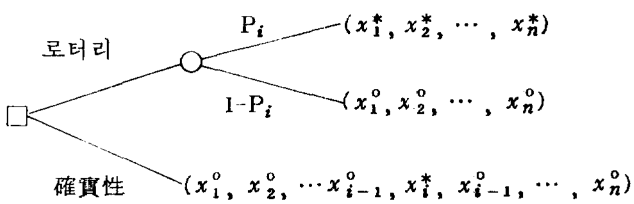
意思決定者推定法은 두 段階過程으로 특징지워진다(two-stage rating approach). 첫단계는 여러 單一屬性效用函數의 導出技法을 사용하여 각 속성의 각 수준에 대해 效用을 먼저 계산한다. 둘째단계는 여러 속성의 相對的 重要性을 위해 피라미터를 추정한다. 이 意思決定者推定法은 단지 앞에서 살펴본 高次線型加算模型에 대해서만 사용해 왔다.50) 즉, 多屬性效用函數 $U(\boldsymbol{x})$를 구하기 위해서는 피라미터 K_i를 구해야 되는데, 이것은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$K_i = U(x_i^*, x_{\bar{i}}^o) = U(x_1^o, \cdots x_{i-1}^o, x_i^*, x_{i+1}^o, \cdots, x_n^o)$$

(x_i^* : x_i 중 가장 選好되는 것, x_i^o : x_i 중 가장 選好되지 않는 것)

만약 n개의 屬性이라면 n개의 피라미터 K_i를 구해야 되기 때문에, 이를 위해서 n개의 方程式을 풀어야 한다. 그러므로 意思決定者는 K_i를 구하기 위해 ($x_1^o, \cdots, x_{i-1}^o, x_i^*, x_{i+1}^o, \cdots, x_n^o$)와 $\boldsymbol{x}^*$가 일어날 確率이 P_i 그리고 $\boldsymbol{x}^o$가 일어날 確率이 $(1-P_i)$인 로터리 ($\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}^o$)간에 無差別해질 수 있는 P_i를 결정해야 한다. $U(\boldsymbol{x}^*) = 1$, $U(\boldsymbol{x}^o) = 0$, $U_i(x_i^*) = 1$ 그리고 $U_i(x_i^o) = 0$라 하면, $U(x_i^*, x_{\bar{i}}^o) = P_i = K_i$가 된다.

이 方法은 다음과 같은 意思決定技(decision tree)로서 요약된다. 여기서 우리는 보다 복잡한 n개 屬性에 대해서도 확장할 수 있다.



50) E.M. Johnson and G.P. Huber, *op. cit.*, p.317.

이와 같은 意思決定者推定法의 長點은 意思決定者에게 크게 어려운 점이 없으며, 또한 意思決定者에게 그가 評價해야 할 과정에 더 많은 통찰력을 줄 수 있다는데 있다.

한편 分析者推定法은 屬性의 값들이 獨立變數로 다루어지고 파라미터는 多量回歸(multiple regression)를 사용하여 추정한다. 일단 파라미터들이 추정되면 각 代案에 대응된 效用이 계산될 수 있다. 이 방법의 長點중의 하나는 加算型 뿐만 아니라 乘算型의 경우에도 이용될 수 있는 방법이다. 또한 이것은 加算型 중에서 相互作用이 있는 항이 있을 때 이용될 수 있는 유일한 방법이다.

이와 같이 파라미터를 추정하기 위하여 多重回歸를 사용하는 대신에 또다른 方法으로 分散分析(analysis of variance)를 이용할 수도 있다. 스로빅, 프라이스너 그리고 바우만(P. Slovic, D. Fleisnner and W.S. Bauman)[51]는 이 방법을 사용하여 株主의 投資決定에 대해 연구하였다.

이상에서 살펴본 二段評價法, 多重回歸法 그리고 分散分析法 외에도 多變量統計分析(multivariate statistical analysis) 방법인 主成分分析(principal component analysis)과 判別分析(discriminant analysis) 등을 활용할 수도 있다.

3. 多屬性危險回避

本論文에서 우리는 소위 多屬性危險回避(multiattribute risk aversion)라고 하는 多屬性效用函數에만 적용되는 새로운 형태의 危險回避槪念을 소개한다. 多屬性危險回避에 대한 최초 사고는 多屬性效用函數의 한 속성으로서 메이어(Richard F. Meyer)[52]에 의해 제시되었는데 여기에서는 메이어의 이론을 일반화시킨 리차드(Scott F. Richard)[53]

51) P. Slovic, D. Fleisnner and W.S. Bauman, "Analyzing the Use of Information in Investment Decision Making: A Methodological Proposal," *Journal of Business*, Vol.45, No.2, April, 1972.

52) Richard F. Meyer, "Some Notes on Discrete Multivariate Utility," Harvard Business School, *Mimeographed Manuscript*, March, 1972.

53) Scott F. Richard, "Multivariate Risk Aversion, Utility Independence and Separable Utility Functions," *Management Science*, Vol.22, No.1, September, 1975.

의 이론을 중심으로 고찰하고자 한다.

먼저 두 屬性인 경우의 危險回避條件을 살펴보고 이의 확장으로 n개 屬性에 대한 危險回避의 必要充分條件을 導出하고자 한다.

이제 의사결정자에게 관련되는 두 屬性을 X와 Y라 하자. 그리고 X와 Y의 모든 영역은 實數로 한정되고 또한 이를 각각 x와 y라 하자. 또한 X와 Y의 카르테시안乘(Cartesian product) $Z=X\times Y$는 $x\in X$와 $y\in Y$인 모든 (x, y)의 集合이다. 이때 Z의 元素를 結果라 하고 $z=(x, y)$로 表示한다. 우리는 Z상에서 정의되는 $U(x, y)=U(z)$라는 效用函數가 있다고 가정하자. 그리고 x_0, x_1, y_0 그리고 y_1에 대해 자주 언급하게 되는데 이들은 $x_0, x_1 \in X$, $y_0, y_1 \in Y$이며, $x_0 < x_1$, $y_0 < y_1$이다. 이제 多屬性危險回避의 槪念定義를 위한 준비가 되었다.

다음과 같은 두 로터리를 생각하자. 즉, 제 1 로터리(L_1)는 0.5의 확율로 (x_0, y_0)를 얻고 0.5의 확율로 (x_1, y_1)을 얻는 것이라 하고, 제 2 로터리(L_2)는 0.5의 확율로 (x_0, y_1)을 얻고 0.5의 확율로 (x_1, y_0)를 얻는 것이라 하자.

이때 만약 의사결정자가 모든 x_0, x_1, y_0 그리고 y_1에 대해 L_2를 L_1보다 더 選好한다면($L_2 \succ L_1$) 그는 多屬性危險回避型이다. 만약 L_1과 L_2간에 無差別하다면($L_1 \sim L_2$) 그는 多屬性危險中立型이며, 또 L_1을 L_2보다 더 選好한다면($L_1 \succ L_2$) 그는 多屬性危險追求型이다. 그런데 왜 $L_2 \succ L_1$일때 多屬性危險回避이며 $L_1 \succ L_2$일때 多屬性危險追求일까? 제 1 로터리는 가장 좋은 것 (x_1, y_1) 혹은 가장 나쁜 것 (x_0, y_0)를 각각 0.5의 확율로 얻는 것이며, 제 2 로터리는 X의 가장 좋은 것과 Y의 가장 나쁜 것 (x_1, y_0) 혹은 X의 가장 나쁜 것과 Y의 가장 좋은 것 (x_0, y_1)이 각각 0.5의 확율로 얻는 것이다. 우리는 가장 좋은 것 혹은 가장 나쁜 것 보다는 어느 정도 좋고 또 어느 정도 나쁜 것을選好하는 것(preferring some good some bad to all or nothing), 즉 L_2를 L_1보다 選好하는 것을 多屬性危險回避라 한다.[54]

여기서 한 가지 注意할 점은 多屬性危險行態(multivariate risk behavior)는 어떤 한 屬性의 로터리에 대한 의사결정자의 危險回避에 의존하는 것이 아니라 變數들의 쌍

---

54) Scott F. Richard, *op.cit.*, pp.13 ~ 14.

(pairs of variables)에 대한 로터리에 의해 결정되는 것이다. 즉 의사결정자는 單一屬性인 X 혹은 Y에 대한 로터리에서는 危險回避가 될 수 있지만 多屬性危險追求도 될 수 있다.

이상에서 多屬性危險回避에 대한 定義를 살펴보았다. 이제 多屬性危險回避인 效用函數에 대한 必要充分條件을 고찰하고자 한다. 만약 Z상에서 모든 (x, y)에 대해 $\partial U(x, y)/\partial x \partial y < 0$ 이면 의사결정자는 多屬性危險回避型이며, $\partial U(x, y)/\partial x \partial y > 0$인 경우와 $\partial U(x, y)/\partial x \partial y = 0$인 경우는 각각 多屬性危險追求型과 多屬性危險中立型이다.55)

우리는 지금 어떤 效用函數 $U(x, y)$에 대해 多屬性危險態度를 결정하기 위한 간단한 基準을 설정했다. 한 가지 注意할 것은 $U(x, y)$가 오목函數(concave function)라고해서 $\partial^2 U(x, y)/\partial x \partial y < 0$가 되어 $U(x, y)$가 多屬性危險回避라는 것을 의미하지는 않는다. 왜냐하면 오목함수라 하더라도 $\partial^2 U(x, y)/\partial x \partial y > 0$인 경우가 있을 수 있기 때문이다.56)

이제 이상에서의 두 屬性인 경우를 n屬性$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$인 경우로 확장하자. X_i의 카르테시안乘 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots, \times X_n$은 n-tuple$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$의 모든 집합이다. 그리고 X의 한 元素를 結果라 하고 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$으로 표현한다. 多屬性危險回避는 屬性의 쌍으로 정의되기 때문에 X_i와 $X_j (i \neq j)$에 관심이 있다. 그리고 集合 $X_{ij} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{j-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_{j-1} \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n$의 元素를 x_{ij}라 하

---

55) 具體的인 것은 Richard F. Meyer, *op. cit.*, pp.14 ~ 15 참조.
한편, 코너(Altan Coner)는 單一屬性效用理論에서 프랫과 애로우(J.W. Pratt and K.J. Arrow)의 絶對危險回避(absolute risk aversion)의 개념을 확장함으로써 多屬性 效用函數의 危險回避를 정의하였다. 즉, 이는
$R_i(x_i) = -U''(x_i) / U'(x_i) = \dfrac{-\partial^2 U}{\partial x_i^2} / \dfrac{\partial U}{\partial x_i}$ 와 같이 된다.
A. Coner, *op. cit.*, pp.92 ~ 104.

56) $U(x, y)$가 오목函數라면 이것의 햇산行列(Hessian matrix)는 半負定形行列(semi-negative definite matrix)이다. 즉,
$\partial^2 U/\partial x \partial x \leq 0$, $[\partial^2 U/\partial x \partial x][\partial^2 U/\partial y \partial y] - [\partial^2 U/\partial x \partial y]^2 \geq 0$이다.
여기서 $\partial^2 U/\partial y \partial y \leq 0$이고 또 $-[(\partial^2 U/\partial x \partial x)(\partial^2 U/\partial y \partial y)]^{\frac{1}{2}} \leq \partial^2 U/\partial x \partial y \leq [(\partial^2 U/\partial x \partial x)(\partial^2 U/\partial y \partial y)]^{\frac{1}{2}}$임을 알 수 있다. 그런데 $\partial^2 U/\partial x \partial y \geq 0$인데도 $U(x, y)$는 오목함수이다. 예컨대, $U(x, y) = (xy)^{\frac{1}{4}}, (x > 0, y > 0)$일때 $\partial^2 U/\partial x \partial y = \frac{1}{16}(xy)^{-\frac{3}{4}} > 0$이지만, 이 함수는 오목함수이다.

면, 結果는 (x_i, x_j, x_{ij})로 표현될 수 있다. 多屬性危險回避의 定義는 앞의 로터리 L_1과 L_2에 있어 x 대신에 x_i를 그리고 y대신에 x_j를 대체시킴으로써 확장될 수 있다. 따라서 모든 x_i^0, x_i^1, x_j^0 그리고 x_j^1에 대해 L_1보다 L_2를 더 選好한다면 多屬性危險回避라 한다.[57]

V. 結 論

오늘날과 같이 복잡다기한 세상에서의 대부분의 意思決定은 單一目的 혹은 單一屬性만 포함하는 의사결정은 거의 없으며 多目的 혹은 多屬性形態이다. 이에따라 효용을 정의하는 변수도 單一變數에서 多數量變數로 변화하게 되었다. 이와같이 다목적을 의사결정에 도입하는 필요성이 발생함에 따라 이를 합리적으로 다루기 위해 多屬性效用理論에 대한 기본개념을 고찰하는데 本硏究의 目的을 두었다.

다속성효용이론은 限界效用理論, 無差別曲線理論 그리고 노이만과 몰겐스턴의 效用理論 등에 바탕을 두고 있으나, 앞에서 살펴본 바와같이 가정에 있어 서로 差異點이 많을 뿐만 아니라 單一屬性이 아니라 多屬性을 다루므로 效用函數模型도 자연 달라질 수밖에 없다. 즉, 傳統的效用理論의 公理라 할 수 있는 不飽和滿足, 比較可能性, 移行性, 獨立性, 繼續性 그리고 單調性 외에 多屬性效用理論을 전개하기 위한 기본적 가정들인 새로운 세 가지의 중요한 獨立概念 즉, 選好獨立, 效用獨立 그리고 加算獨立을 제시하였다. 또한 이러한 獨立에 대한 가정이 달라짐에 따라 多屬性效用函數의 模型은 加算型 혹은 乘算型 중의 하나를 취하게 됨을 살펴 보았다.

그런데 乘算型效用函數는 많이 개발되어 왔지만 實際硏究에 이용된 경우는 많지 않으며 說明力에 있어서도 加算型效用函數와 대체로 같다. 따라서 加算型效用函數를 주로 사용하

57) 만약 $U_1, U_2, \cdots, U_n$이 모든 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$에 대해 多屬性危險回避이고, $b_1, b_2, \cdots, b_n$이 陽의 常數라면 $U = a + \sum_{i=1}^{n} b_i U_i$도 多屬性危險回避이다. 또한 만약 $U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$이 多屬性危險回避이고 $f(\cdot)$가 오목函數라면, $V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f[U(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$도 多屬性危險回避이다.

는데 이는 이 모형의 가정이 너무 강하다는 短點이 있으나 역시 상대적 單純性이 있기 때문이다. 여하튼 이와같은 多屬性效用函數模型들은 多目的意思決定問題들을 합리적으로 다루는데 유용한 것만은 부인할 수 없다. 그러나 최근까지도 의사결정에 다목적상황을 거의 고려하지 않고 있다. 왜냐하면 이를 고려하면 分析技法이 복잡해지고, 또한 이 이론이 지난 10여년간 개발되어 왔다고는 하나 아직 초기 단계에 있기 때문이다.

結論的으로 볼 때, 多屬性效用理論은 多目的意思決定問題와 連繫되어 앞으로 그 活用範圍가 넓어질 뿐 아니라 重要性도 크게 인식될 것으로 전망된다.

參 考 文 獻

1. 李弼商, 財務論, 博英社, 1984.
2. 池 淸, 現代財務管理論, 貿易經營社, 1986.
3. 池 淸, 曺 淡, 投資論, 貿易經營社, 1985.
4. Bauman, E.H., Consistency and Optimality in Managerial Decision Making, *Management Science*, Vol. 9, No. 2, January, 1963.
5. Coner, Altan, *Relevance and Application of Multiattribute Utility Theory and Risk Aversion Analysis to Participatory Group Decision Making*, Ph.D. Dissertation, Michigan State University, 1978.
6. Einhorn, H.J., "Expect Judgment and Mechanical Combination," *Organizational Behavior and Human Performance*, Vol. 7, No. 1, February, 1972.
7. Farquhar, P.H., "A Fractional Hypercube Decomposition Theorem for Multiattribute Utility Functions," *Operations Research*, 23, 1975.
8. Fishburn, P.C., "Additivity in Utility Theory with Denumerable Product Sets," *Econometrica*, 34, 1966.
9. ____________, "Additivity Utilities with in Complete Product Sets: Application to Priorities and Assignments," *Operations Research*, 15, 1967.

10. ____________, "Bernoullian Utilities for Multiple Factor Situations," in *Multiple Criteria Decision Making,* J.L. Cochrane and M. Zeleny, eds., University of South Carolina Press, 1973.

11. ____________, "Independence and Additivity in Multivariate, Unidimentional Expected Utility Theory," *International Economic Review,* 8, 1967.

12. Howard, R.A., "The Foundation of Decision Analysis," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics,* Vol. SSC-4, 1968.

13. Huber, G.P., "Methods for Quantifing Subjective Probabilities and Multivariate Utilities," *Decision Science,* Vol. 5, 1974.

14. Huber, G., V. Sahney and D. Ford, "A Study of Subjective Evaluation Models," *Behavioral Science,* November, 1969.

15. Johnson, Edgar M. and George P. Huber, "The Technology of Utility Assessment," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics,* Vol. SMC-7, No. 1, May, 1977.

16. Keeley, S.M. and M.E. Doherty, "Baysian and Regression Modeling of Graduate Admision Policy," *Organizational Behavior and Human Performance,* Vol. 8, No. 2, October, 1972.

17. Keeney, R.L., Multiplicative Utility Functions, MIT, March, 1972.

18. ____________, "Multiplicative Utility Functions," *Operations Research*, 22, 1974.

19. ____________, and H. Raiffa, *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, Wiley & Sons, 1976.

20. Luce, R.D. and H. Raiffa, *Games and Decisions*, Wiley & Sons, New York, 1957.

21. MacCrimmon, K.R., "An Overview of Multiple Objective Decision Making," in J.L. Cochrane and M. Zeleny, eds., *Multiple Criteria Decision Making*, University of South Calolina Press, Colombia, S.C., 1973.

22. ________________, *Decion Making among Multiple Attribute Alternatives: A Survey and Consolidated Approach*, Rand Corporation, Santa Monica, December, 1968.

23. Meyer, Richard F., "Some Notes on Discrete Multivariate Utility," Harvard Business School, *Mimeographed Manuscript*, March, 1972.

24. Von Neumann, John and Oscar Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, N.J., 1947.

25. Pollak, R.A., "Additive von Neumann-Morgenstern Utility Functions," *Econometrica,* 35, 1967.

26. Pratt, W., "Risk Aversion in the Small and in the Large," *Econometrica,* Vol. 32, No. 1-2, Jan. - Apr., 1964.

27. Richard, Scott F., "Multivariate Risk Aversion, Utility Independence and Separable Utility Functions," *Management Science,* Vol. 22, No. 1, September, 1975.

28. Slovic, P., D. Fleisnner and W.S. Bauman, "Analyzing the Use of Information in Investment Decision Making: A Methodological Proposal," *Journal of Business,* Vol. 45, No. 2, April, 1972.

29. Swalm, R.O., "Utility Theory - Insights into Risk Taking," *Harvard Business Review,* Vol. 44, 1966.

30. Spetzler, C.S., "The Development of a Corporate Risk Policy for Capital Investment Decisions," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics,* Vol. SSC-4, 1968.