公差를 利用한 不明確目標計劃模型

−A Tolerance Approach to Fuzzy Goal Programming Problem−

金 鍾 淳* 黃 圭 承**

《目 次》

Ⅰ. 硏究目的

經營者가 接하는 意思決定情報들 가운데는 不確實한 情報(uncertain information) 또는 不明確한 情報(fuzzy information)가 흔히 있을 수 있다. 그 두가지의 情報는 속성이 전혀 다른 것이다. 왜냐하면 不確實한 情報는 한 事象의 發生이 無作爲的인 정보이지만 不明確情報는 어떤 事象이 어느 集團에 속하는지가 不分明한 情報이기 때문이다.

本硏究에서는 不明確情報에 대한 槪念을 간단히 整理하였다. 그리고 기존의 不明確 目標計劃模型들인 R. Narasimhan의 모형과 E.L. Hannan 의 모형에 대체적인

* 江原大學校 經營學科 助敎授
** 高麗大學校 經營學科 敎 授

模型 즉, 公差(tolerance)를 利用한 模型을 제시하고자 한다.

Ⅱ. 不明確情報

1. 不明確情報의 槪念

意思決定者가 접하는 不確實한 情報와 不明確한 情報는 각각 無作爲性(randomness)및 不明確性 (fuzziness)이라는 相異한 속성을 갖는 情報들이다.[1]

無作爲性이 있는 不確實한 情報는 一定時點 또는 期間內에 어떤 事象의 발생이 불확실한(the uncertainty of occurance of an object) 情報이다. 한편 不明確한 情報는 어떠한 事象의 發生可能性에 關聯된 것이 아니고 그 事象이 意味하는 바를 明確히 定義할 수 없거나, 또는 그 事象이 속하는 集合과 속하지 않는 集合間의 分明한 境界(boundary)를 설정하기가 불가능한 情報를 말한다.

不明確情報는 不明確數值情報와 非數值的인 不明確言語情報로 區分된다. 認知된 情報가 不確實한 것인지 또는 不明確한 것인지를 分明히 구분할 필요가 있다. 다음의 例 2.1은 두가지의 不明確 情報가 동시에 내포된 情報이다.

例 2·1 : "백령 주식회사의 新製品들의 내년도 販賣量이 금년도의 것보다 約15% 씩 증가할 確率이 0.85 이다."

例 2·1 의 정보 중에서 "確率이 0.85 "라는 情報는 不確實性을 나타내는 정보이다. 왜냐하면 그 정보는 내년 한해동안에 " 15 %의 販賣量 增加 "라는 事象이 實現(發生)될 可能性이 0.85 임을 나타내는 明白한 境界가 存在하지만, 다만 그 기간동안에 " 15 %의 販賣量 增加 "라는 事象이 實現될 것인지, 또는 실현되지 않을 것인지는 無作爲的인 속성이 있는 정보이기 때문이다.

한편 "新製品들"이라는 情報와 "約 15 %"라는 정보는 不明確한 情報이다. "新製品들"이라는 정보는 非數值的 不明確言語情報이다. 왜냐하면 新製品과 新製品이 아닌 것을 區分해 줄 수 있는 境界가 설정되어 있지 않으므로 그 언어정보는

---

1) L·A. Zadeth, "Fuzzy Sets," *Information and Control*, Vol.8, 1965, PP. 338-353.; L.F.B Baptistella and A. Ollero, "Fuzzy Methodologies for Interactive Multicriteria Optimization," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SMC-10, 1980, PP. 355-365.

例 2.2; 두가지 제품(제품 x 및 y)을 生產 • 販賣하는 企業에서 의사결정자가 利益 및 두 製品의 販賣라는 3 가지의 經營目標를 갖고 있다면, 세가지 목표들의 二元比較한 결과는〈 式 2-1 〉과 같이 行列로 表現될 수 있다.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} W_1/W_1 & W_1/W_2 & W_1/W_3 \\ W_2/W_1 & W_2/W_2 & W_2/W_3 \\ W_3/W_1 & W_3/W_2 & W_3/W_3 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \langle 2-1 \rangle$$

단, W_1 ,W_2 그리고 W_3 는 각각 利益目標 , 製品 X 의 販賣目標 그리고 製品 y 의 販賣目標의 단위당 편차가 갖는 重要度이다.行列 A 에서 a_{ij} 가 意味하는 바는 目標 i 가 目標 j 보다 몇倍나 더 중요한가를 나타내는 것이다.

前述한 세가지의 경영목표에 대한 二元比較의 結果値가 다음의 行列 A와 같다고 하자.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

上記의 行列 A 를 살펴보면, 意思決定變數들의 중요도간의 矛盾 내지는 不明確性을 발견하게 될 것이다.

企業의 利益目標가 製品 x 의 販賣目標보다 2 배 더 중요하며, 제품 x 의 판매목표는 제품 y 의 판매목표보다 2 배 더 중요하다고 되어 있다. 그러면 이익목표는 製品 y 의 판매목표보다 4 배더 중요해야 될 것이다. 그러나 意思決定者가 느끼는 바는 그렇지 아니함을 行列 A를 통해서 알 수 있다. 이러한 不明確性은 아이겐벡터의 개념을 적용하여 解를 구하기도 한다.[4]

인간의 정보기억량의 限界와 필요한 정보의 描寫能力의 한계는 不明確한 정보가 發生될 수 있는 또 다른 根源들 중의 하나이다.[5]

---

4) T.L. Saaty, "Exploring the Interface between Hierarchies,Multiple Objectives and Fuzzy Sets," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 1, 1978, PP. 57-68.

5) H.J. Zimermann, *op. cit.*, P.203.

Ⅲ. 不明確情報의 集合論的 意味

1. 旣存硏究에 대한 考察

不明確性이 內在된 문제를 효과적으로 해결할 수 있는 方法論의 必要性을 인식하고 Zadeh는 1965年에 "fuzzy sets"이라는 논문을 발표하여 불명확성이 內在된 문제해결을 위한 基礎的인 아이디어를 提示하였다.[6] 그는 不明確集合을 하나의 實直線(real line)上의 단위간격(unit interval)으로 매핑(mapping)하는 방법으로 불명확집합의 개념을 說明하였다.[7]

前述한 論文은 電子工學 및 컴퓨터科學(Computer Science)을 전공하는 학자의 입장에서 쓴 글이었지만, 그 후 다른 分野를 연구하던 학자들도 불명확집합이론에 대해서 많은 연구를 하였다.

불명확집합이론이 硏究·應用되고 있는 분야를 살펴보면, 制御(Control), O.R., 의학적인 診斷(diagnosis), 그리고 位相數學(topology)등 실로 다양한 분야에서 연구 및 응용되고 있다.[8]

不明確理論을 發展 내지 体系化시킨 서적들을 硏究內容別로 분류하면 다음과 같다.[9]

1972年 및 1975年에 각각 간행된 Kaufman의 "Theory of Fuzzy Sets"와 "Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets Vol.1"은 불명확집합에 대한 入門書籍이다. 應用에 초점을 둔 것으로는 Zadeh, Tanaka 그리고 Fu가 1975年에 共著한 "Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Process"가 있다.

불명확집합이론을 自動化問題에 적용시킨 것으로는 Gupta의 1977년 저서인 "Fuzzy Automata and Decision Processes"와 Kandel과 Lee의 共著書인 "Fuzzy Switching and Automata: Theory and Application"이 있다. 한편 불명확집합 이론을 주로 意思決定問題에 적용시킨 것으로는 Kickert가 1978년 저술한 "Fuzzy Theories On Decision Making" 그리고 Gupta와 Sanchez가 저술한 "Fuzzy

---

6) L.A. Zadeh, op.cit., PP. 338-353, ; J.G. Brown, "A Note on Fuzzy Sets," *Information and Control* Vol. 18, 1971, P.32.

7) *Ibid*

8) D.Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems*, (New York: Academic Press, 1980.) PP. 40 ~ 42.

9) *Ibid* P. 4.

불명확한 언어정보로 간주할 수 있는 것이다. 다시말해서 新製品임을 입증 . 가능케 해 줄 수 있는 여러 基準들 중에서 製品을 市場에 도입한 期間을 新製品임에 대한 유일한 評價基準이라고 가정할 경우, 어느정도의 期間이 경과된 제품을 新製品이라고 할 것인지가 不明確하다. 즉 新製品들이란 정보는 製品을 시장에 도입한 시점이 1년 以下인 製品을 新製品이라고 할 것인지 아니면 2년 以下인 경우를 指稱하는지가 불분명한 정보이다.

數值不明確情報인 "約 15 %"라는 情報의 경우, 그것이 14 %와 16 %사이의 값을 意味하는지 또는 13 %와 17 %사이의 값을 意味하는지에 대한 境界가 不明確하다. 이와같은 不明確한 意思決定情報는 어렵지 않게 발견될 수 있다.

2. 不明確情報의 發生根源

不明確情報의 發生根源은 情報傳達過程에서 관계되어지는 人間的인 要因, 問題分析視角의 변화에 따른 狀況判斷의 非一致性, 그리고 인간의 情報描寫能力의 限界等에 있다.

의사결정자료로 利用되는 정보는 意思決定者 自身에 의해서 획득되는 경우 못지않게 他人으로부터 획득되어지는 경우도 흔히 있다. 정보가 타인으로 부터 획득될 때, 情報傳達의 수단으로 사용되는 言語는 人間들 相互間의 思考들, 모형화될 目標시스템, 그리고 모형 그 자체를 연결하는 役割을 한다. 意思決定時에 필요한 정보전달언어에는 人間的인 要因인, 知覺(Perception), 主觀性(Subjectivity),그리고 目標에 對한 態度(attitudes of goals)가 내포되기 쉽다. 그 要因들은 不明確情報의 한 發生根源이 된다.[2]

代替案이 多數일 경우, 전체적인 입장에서 그 代替案의 重要性을 평가하는 것은 쉽지 않을 것이며, 설혹 評價를 했다고 하더라도 그것은 모호한 것이 되기 쉽다. 이 경우 意思決定者는 그 대체안들을 二元比較(Pairwise Comparison)한 다음,그 정보를 아이겐벡터(eigenvector)概念으로 처리하여 解를 구할 수가 있다.[3]

---

2) H.J. Zimmermann," Using Fuzzy Set in Operational Research," *European Journal of Operational Research*, Vol. 13, 1983, PP. 201-202.
E.L. Hannan, "On Fuzzy Goal Programming," *Decision Sciences*, Vol. 12. 1981, PP. 529-531.

3) E.L. Hannan, "On Fuzzy Goal Prgramming," *Decision Sciences*, Vol. 12. 1981, pp. 529-531.

Information and Decision Process"가 있다.

Fuzzy Set의 개념을 적용하는 많은 技法들 중에서 計量經營에 관련이 있는 것들을 열거해 보면 線型計劃法, 게임理論, 輸送計劃法, PERT, "raking" 決定法, "Compromising Programming",그리고 目標計劃法(Goal Programming) 등이 있다.

2. 不明確集合

L.A. Zadeh에 의해서 도입된 不明確集合理論은 人間的인 判斷, 認知, 그리고 感情이 重要한 役割을 하는 人間的 시스템들의 행위를 이해하기 위한 하나의 효과적인 道具이다.[10] 그 不明確集合에 대한 한 定義를 고찰하여 보면 다음과 같다.

X를 點들의 空間(a Space of Points)이라하고, 각 點을 x로 나타내며 x를 X의 元素라 한다. 그러면 점들의 空間 X상에서 不明確集合 A는 다음의〈式3-1〉과 같은 有序雙원들(ordered pairs)의 集合으로 정의된다.[11]

$$A = \{\chi,\ \mu_A(\chi)\} \quad \forall \chi \in X \quad \cdots\cdots (3-1)$$

(式3-1)에서 元素 χ에 대한 멤버쉽함수 $\mu_A(\chi)$의 값은 원소χ가 不明確集合 A에 소속되는 程度를 나타낸다.

멤버쉽함수 $\mu_A(\chi)$의 값은 一般的으로 0과 1 사이의 實數로 表現한다. 이때 멤버쉽함수의 값이 1에 가까워질수록 불명확집합 A의 원소χ의 멤버쉽程度는 더욱 더 增大된다. 그와 反對로 그 값이 0에 가까워질수록 멤버쉽程度는 더욱 더 줄어든다.[12]

멤버쉽함수의 값이 示唆하는 바를 달리 說明해보면, 그 함수의 값이 1에 가까워짐은 元素 x가 集合 A에 속하게 될 可能性이 더욱 커짐을 뜻하며, 反對로 그 함수의 값이 0에 가까워짐은 원소 x가 集合 A에 속하게 될 可能性이 적어짐을 뜻한다.[13]

---

10) W.X. Xie and S.D Bedrosian, "An Information Measure for Fuzzy Sets," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-14, No.1, 1984, P.151.

11) L.A. Zadeh, op. cit., P. 339.; R.E. Bellman and L.A. Zadeh," Decision Making in a Fuzzy Environment," *Management Science*, Vol. 17, 1970, P.B.-143.

12) *Ibid.*

13) A. Kandel and S.C. Lee, *Fuzzy Switching and Automata:Theory and Applications*, (New York:Crane,Russak and Company, Inc. 1979.), PP. 46-47.

한편 傳統的인 집합개념에서의 멤버쉽함수 값은 오직 두가지의 값 즉, 0 또는 1로만 表現이 可能한 것이다. 멤버쉽함수 $\mu_A(\chi)$의 값이 1이면 元素 x가 集合 A에 속한다는 것이 참인 경우이다. 반대로 그 $\mu_A(\chi)$가 0인 경우에도 원소 x가 집합 A에 속한다고 하면 그것은 거짓이 된다.

不明確集合의 멤버쉽함수의 값이 오직 0과 1로만 이루어진 경우, 불명확집합의 멤버쉽함수는 傳統的인 집합론의 特性函數(Characteristic functon)와 同一하다. 따라서 不明確集合理論은 전통적인 집합이론을 一般化한 것이라 할 수 있다.[14]

3. 멤버쉽 函數

不明確目標에 대한 멤버쉽함수는 線型 또는 非線型이 있는데 본연구에서는 선형함수를 중심으로 설명하려 한다.

(1) $(AX)_i \lesseqgtr b_i$ 인 目標의 멤버쉽函數

$(AX)_i$는 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$를 간단히 表現한 것이다. 목표를 $(AX)_i \lesseqgtr b_i$로 표현한 것은 좌변의 함수식이 우변의 상수보다 크지않지만 작은 정도가 불명확함을 나타낸 것이다. 그 멤버쉽함수는 다음의 〈式3－2〉로 定義되고, 그 內容을 圖示하면 〈圖3－1〉과 같다.[15]

$$\mu_j(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{if } (AX)_i \leqq b_i \\ 1-\dfrac{(AX)_i - b_i}{\triangle_i} & \text{if } b_i \leqq (AX)_i \leqq b_i + \triangle_i \\ 0 & \text{if } (AX)_i > b_i + \triangle_i \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots \langle 3\text{–}2 \rangle$$

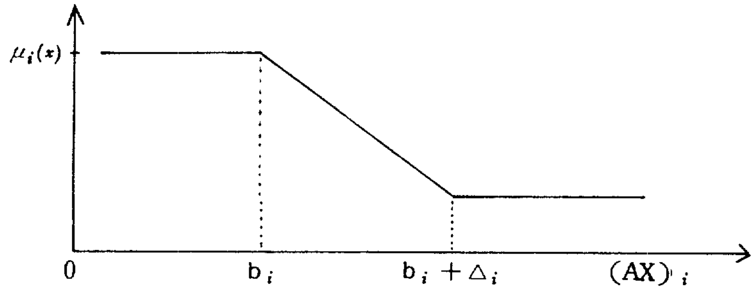
(式3－2)의 b_i는 i번째 不明確目標(의사결정자의 열망수준)을 의미한다.

---

14) *Ibid.*, P.46.

15) R.G. Dyson, "Maximin Programming, Fuzzy Linear Programming,and Multicriteria Decision Making," *Journal of Operational Research Society*, 1980, Vol.30, P.265. ; G. Wiedey and H.J. Zimmermann, " Media Selection and Fuzzy Linear Programming,"*Journal of Operational Research Society*, 1978, PP. 1074-1075.

$\triangle_i$는 i번째 목표에 대한 의사결정자의 熱望水準이 속하게 될 최대한의 許容領域을 의미하는 非陰의 常數이다.

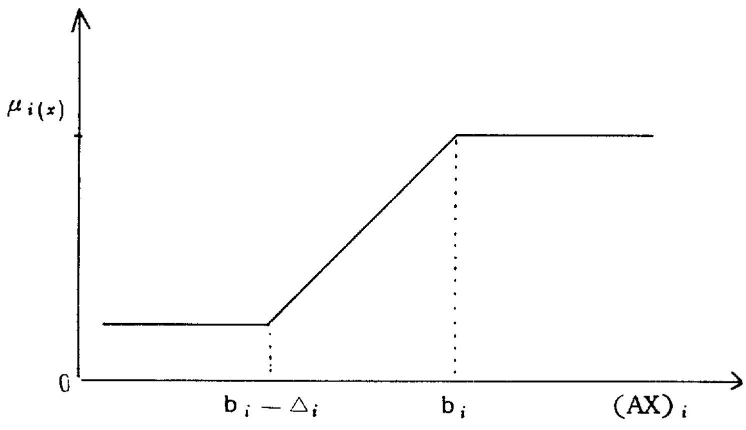


〈圖 3－1〉 $(AX)_i \lesseqgtr b_i$ 形 目標에 대한 線型 멤버쉽函數

(2) $(AX)_i \gtrsim b_i$인 目標의 멤버쉽函數

$(AX)_i \gtrsim b_i$인 멤버쉽 함수는 〈式 3－3〉과 같이 定義되고, 그 內容을 圖示하면 〈圖 3－2〉와 같다.[16]

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (AX)_i \geqq b_i \\ 1 - \dfrac{b_i - (AX)_i}{\triangle_i} & \text{if } b_i - \triangle_i \leqq (AX)_i \leqq b_i \\ 0 & \text{if } (AX)_i < b_i - \triangle_i \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}3)$$



〈圖 3－2〉 $(AX)_i \gtrsim b_i$ 形 목표에 대한 線型 멤버쉽函數

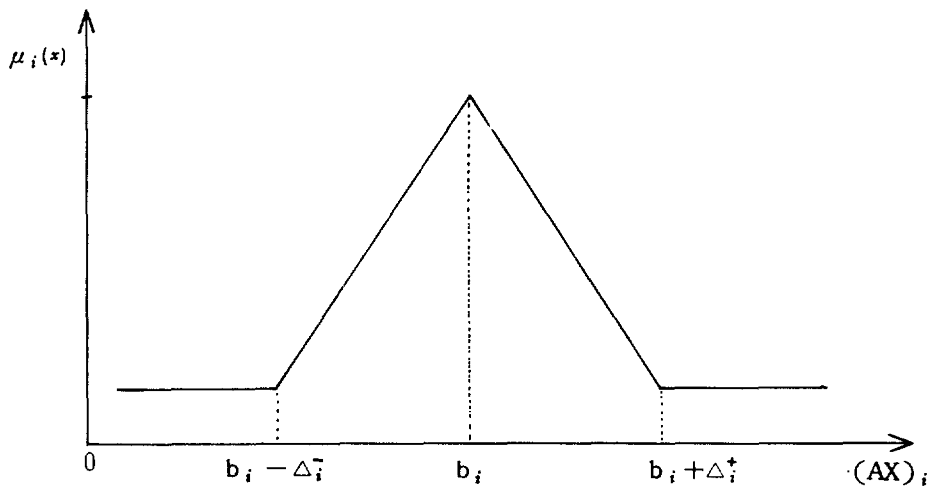
16) *Ibid.*

(3) $(AX)_i \approxeq b_i$ 인 目標의 멤버쉽函數.

不明確目標가 $(AX)_i \approxeq b_i$ 로 표현되는 경우는 좌변함수가 우변상수와 等式의 關係에 있으나 程度가 不明確한 경우이다. 이경우의 멤버쉽函數는 (式 3 － 4)와 같이 定義되고 (圖 3 － 3)과 같이 表現할수 있다.[17]

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (AX)_i = b_i \\ 1 - \dfrac{(AX)_i - b_i}{\triangle_i^+ - \triangle_i^-} & \text{if } \left|(AX)_i - b_i\right| \leqq \triangle_i^+ + \triangle_i^- \\ 0 & \text{if } \left|(AX)_i - b_i\right| > \triangle_i^+ + \triangle_i^- \end{cases} \cdots \langle 3\text{-}4 \rangle$$

단, $\triangle_i^+ \cdot \triangle_i^- = 0$



〈 圖 3 － 3 〉 $(AX)_i \approxeq b_i$ 形 목표에 대한 線型 멤버쉽函數

17) K. Ghassan, "New Utilization of Fuzzy Optimization Method," in M.M. Gupta and E.Sanchez (eds.), *Fuzzy Information and Decision Process*, (Amsterdam: North-Holland Publishing, Co.1982.) PP. 240-245.

Ⅳ. 不明確 目標計劃模型

1. 公差槪念을 利用한 接近法

不明確目標에는 다음과 같은 세가지 시스템이 있다.

$(AX)_i \lesssim b_i$ ……………………………………………… 〈System A〉

$(AX)_i \gtrsim b_i$ ……………………………………………… 〈System B〉

$(AX)_i \cong b_i$ ……………………………………………… 〈System C〉

단, $(AX)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \chi_j$. "～"는 "fuzzifier"임

本 硏究의 不明確 目標計劃問題의 解決에 利用하고자 하는 公差 t_i 는 工學分野에서 주로 利用하여 온 것으로 前述한 멤버쉽函數의 $\triangle_i$ 와 같은 것으로 볼 수 있다. 公差는 平均値로 부터 許用된 편차 또는 정상치 주변에의 관련된 許用可能한 變化値를 말한다.[18]

기존의 불명확목표계획인 Narasimhan의 모형 또는 Hannan의 모형과 달리 "公差를 利用한 불명확목표계획모형"이라고 稱한 이유는 다음과 같다. 그 두 모형들은 멤버쉽함수의 값을 직접 1에 가깝게 하는 모형들이다. 그러나 本模型은 불명확목표별로 주어진 公差〔許用偏差〕를 0에 가깝게 하므로써 전술한 모형들이 멤버쉽함수를 1에 가깝게 하는 것과 같은 효과를 볼 수 있는 모형이기 때문이다.

불명확목표들의 형태들인 시스템 A, B 그리고 C에 公差槪念을 적용해서 解를 구하기 위해서는 다음의 세 절차가 필요하다.

절차1 ; 公差(t_i^+, t_i^-)를 利用해서 불명확목표들을 變換시킨다.

t_i^+는 시스템 A와 같은 불명확목표의 " fuzzifier "에 대체될 수 있는 公差을 뜻하며 t_i^-는 시스템 B의 "fuzzifier"에 대체될 수 있는 公差를 의미한다.

시스템 A, B 그리고 C에 公差를 적용시키면 그 시스템들은 각각 (式4－2), (式4－4) 그리고 (式4－5)와 같게 된다.

---

18) C.V. Negoita and M. Sularia, " On Fuzzy Mathematical Programming and Tolerances in Planning," *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, 1976, Vol. 1, PP. 3-14.

$$(AX)_i + t_i^+ x_{n+1} \leqq b_i + t_i^+ \quad \cdots\cdots \quad (4-1)$$

(for system A)

시스템 A 에서의 $(1-x_{n+1})$ 을 β_i^+ 로 두면 (式 4 − 1)은 (式 4 − 2)와 같다.

$$(AX)_i - t_i^+ \beta_i^+ \leqq b_i \quad \cdots\cdots \quad (4-2)$$

(for system A)

$$(AX)_i - t_i^- x_{n+1} \geqq b_i - t_i^- \quad \cdots\cdots \quad (4-3)$$

(for system B)

시스템 B 에서의 $(1-x_{n+1})$ 을 β_i^- 로 두면 (式 4 − 3)은 (式 4 − 4)로 변한다.

$$(AX)_i + t_i^- \beta_i^- \geqq b_i \quad \cdots\cdots \quad (4-4)$$

(for system B)

시스템 A 및 B 와 같은 과정을 거쳐서 시스템 C 는 (式 4 − 5)와 같이 된다.

$$(AX)_i + t_i^- \beta_i^- - t_i^+ \beta_i^+ = b_i \quad \cdots\cdots \quad (4-5)$$

(for system C)

(式 4 − 5)의 t_i^-, t_i^+, β_i^- 그리고 β_i^+ 는 (式 4 − 2)및 (式 4 − 4)의 경우와 같다.

절차 2 ; i 번째 불명확목표에 대한 중요도 w_i 를 결정한다. 그 w_i 가 變數 β_i^- 및 β_i^+ 의 기여율(contribution rate)역할을 하게 만든다.

만약 i 번째 불명확목표에 대한 합리적인 중요도가 w_i 라고 가정한다면,[19] 시스템A, B 그리고 C에 대한 解를구하기 위한 각시스템별 目的函數 및 해당제약조건은 각각 다음과 같다. 편의상 세 시스템들의 불명확목표들의 수는 K개로 가정한다.

$$\min \sum_{i=1}^{k} w_i \, \beta_i^+ \quad \cdots\cdots \quad (\text{System } A_1)$$

$$\text{s.t.} (AX)_i - t_i^+ \beta_i^+ \leqq b_i , \; i=1, \cdots\cdots, K$$

(for system A)

$$\min \sum_{i=1}^{k} w_i \, \beta_i^- \quad \cdots\cdots \quad (\text{System } B_1)$$

$$\text{s.t.} (AX)_i + t_i^- \beta_i^- \geqq b_i , \; i=1, \cdots\cdots, K$$

(for system B)

$$\min \sum_{i=1}^{k} w_i \, (\beta_i^- + \beta_i^+) \quad \cdots\cdots \quad (\text{System } C_1)$$

19) w_i 의 결정에 대해서는 다음 논문을 참조 하시요.

E.L. Hannan, *op.cit.*, pp.259-262.

s.t. $(AX)_i + t_i^- \beta_i^- - t_i^+ \beta_i^+ = b_i$, $i = 1, \cdots\cdots, K$

(for system C)

절차 3 ; 本硏究에서 제시하고자 한 모형인 시스템 D에 대해서 전형적인 LP접근법으로 解를 구한다.

$$\min \sum_{i=1}^{k} w_i \ (\beta_i^- + \beta_i^+) \cdots\cdots\cdots (\text{system D})$$

s.t $(AX)_i + t_i^- \beta_i^- - t_i^+ \beta_i^+ = b_i$, $i = 1, \cdots\cdots, K$

$\beta_i^- . \beta_i^+ = 0$, β_i^- , $\beta_i^+, t_i^-, t_i^+ \geqq 0$, $i=1, \cdots\cdots$, K , $X_j \geqq 0$ $j=1, \cdots\cdots, n$

여기서 $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$, β_i^+는 시스템 A에서의 $(1-x_{n+1})$이고 β_i^-는 시스템 B에서의 $(1-x_{n+1})$ 이다.

2. 公差를 利用한 模型의 妥當性

本硏究에서 제시한 模型의 妥當性이 다음의 두定理에 의해서 입증될 것이다. 정리 1에서는 本模型의 x_{n+1} 이 Narasimhan의 모형 및 Ghassan의 모형의 멤버쉽함수와 같음이 증명될 것이다. 定理 2에서는 Hannan의 모형에 의한 최적해와 同一함이 입증될 것이다.

定理 1 : A) 不明確目標가 시스템 A 또는 B와같은 모양을 취할 경우, 本模型의 x_{n+1}은 Narasimhan의 모형에서의 멤버쉽함수 λ 와 같다.

B) 不明確目標가 시스템 C와 같은 형태일 경우, 본모형의 x_{n+1}은 Ghassan의 모형의 멤버쉽함수 $\mu_i(x)$와 같다.

(A)에 대한 증명 : 시스템 A와 B의 경우 Narasimhan 모형의 멤버쉽함수 λ는 (式4-6) 및 (式4－7)과 같다.[20]

$$\lambda \leqq \frac{b_i + \triangle_i - (AX)_i}{\triangle_i} \cdots\cdots\cdots (4-6)$$

$$b_i \leqq (AX)_i \leqq b_i + \triangle_i$$

(for the system A)

20) R. Narasimhan, " Goal Programming in a Fuzzy Environment," *Decision Sciences* Vol, 11, 1980, PP. 325-336.

$$\lambda \leqq \frac{(AX)_i - (b_i - \Delta_i)}{\Delta_i} \quad \cdots\cdots (4-7)$$

$b_i - \Delta_i \leqq (AX)_i \leqq b_i$

(for the system B)

(式4－6) 및 (式4－7)에서 Δ_i는 주관적으로 정한 常數이다.[21] 본연구에서 제시한 모형의 (t_i^+, t_i^-)의 크기가 Δ_i와 같다고 가정하자. 시스템 A의 경우, 본모형의 i번째 目標에 대한 방정식은 前述한 (式4－2)와 같다.

즉, $(AX)_i - t_i^+ \beta_i^+ \leqq b_i \quad \cdots\cdots (4-2)$

$\beta_i^+ = 1 - x_{n+1}$이므로 (式4－2)는 (式4-8) 과 동일하다.

$$x_{n+1} \leqq \frac{t_i^+ - (AX)_i + b_i}{t_i^+} \quad \cdots\cdots (4-8)$$

위에서 가정한 것처럼 $t_i^+ = \Delta_i$이면, 시스템 A의 경우 본모형의 χ_{n+1}은 Narasimhan 모형의 λ와 동일함을 알 수 있다. 같은 方法으로 시스템 B의 경우 본모형의 x_{n+1}과 Narasimhan 모형의 λ가 동일함이 증명될 수 있다.

(B)에 대한 증명 : 시스템 C의 경우 Ghassan 모형의 멤버쉽함수 $\mu_{i(x)}$는 다음의 (式4－9)와 같다.[22]

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (AX)_i = b_i \quad \cdots\cdots (4-9) \\ 1 - \dfrac{[(AX)_i - bi]}{\Delta_i^+ - \Delta_i^-} & \text{if } |(AX)_i - b_i| \leqq \Delta_i^+ + \Delta_i^- \\ 0 & \text{if } |(AX)_i - b_i| > \Delta_i^+ + \Delta_i^- \end{cases}$$

단 $\Delta_i^+ \cdot \Delta_i^- = 0$

시스템 C의 경우 본모형의 i번째 목표는 (式4－5)이다. $\beta_i^+ = \beta_i^- = 1 - \chi_{n+1}$이므로 (式4－5)는 (式4－10)과 같다.

$$\chi_{n+1} = 1 - \frac{[(AX)_i - b_i]}{t_i^+ - t_i^-} \quad \cdots\cdots (4-10)$$

$(AX)_i$와 bi의 관계에 의해서 (式4－10)은 (式4－11)과 같이 표현될 수 있다.

$$\chi_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{if } (AX)_i = b_i \quad \cdots\cdots (4-11) \\ 1 - \dfrac{[(AX)_i - b_i]}{t_i^+ - t_i^-} & \text{if } |(AX)_i - b_i| \leqq t_i^+ + t_i^- \\ 0 & \text{if } |(AX)_i - b_i| > t_i^+ + t_i^- \end{cases}$$

21) *Ibid.*

22) K. Ghassan, *op.cit*, P.245.

단, $t_i^+ \cdot t_i^- = 0$

본모형의 $t_i^+ [t_i^-]$가 Ghassan 모형의 $\Delta_i^+ [\Delta_i^-]$와 같게 결정된다. 그러면 (式 4－9)는 (式 4－11)과 같으므로 定理 1이 증명되었다.

定理 2 : 不明確目標計劃問題에 대한 Hannan 의 接近方法인 시스템 E의 최적해를 λ^*라고 한다.[23]

$$\min \sum_{i=1}^{k} w_i (d_i^+ + d_i^-) \cdots\cdots\cdots (\text{System E})$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{(AX)_i}{\Delta_i} + d_i^- - d_i^+ = \frac{b_i}{\Delta_i}, \quad i = 1, \cdots\cdots, k$$

$$\lambda \quad + d_i^- + d_i^+ \leqq 1, \quad i = 1, \cdots\cdots, K$$

$$x_j \geqq 0, \ j = 1, \cdots\cdots, n, \ \lambda \geqq 0, \ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1, \ d_i^+, \ d_i^- \geqq 0, \ i = 1, \cdots\cdots, K,$$

한편 本硏究에서 제시한 公差를 이용한 接近方法인 시스템 D의 최적해를 λ^0라 한다. 그러면 $\lambda^* = \lambda^\circ$이다.

증명 : $\beta_i^+ \cdot \beta_i^- = 0$ 이므로, 시스템 D는 시스템 D_1 또는 시스템 D_2로 전환될 것이다.

$$\max \sum_{i=1}^{k} w_i x_{n+1} \cdots\cdots\cdots (\text{System } D_1)$$

$$\text{s.t.} \quad x_{n+1} \leqq \frac{b_i + t_i^+ - (AX)_i}{t_i^+}, \quad i = 1, \cdots\cdots K$$

$$x_{n+1} \leqq 1$$

$$x_j \geqq 0, j = 1, \cdots\cdots, n, \ x_{n+1} \geqq 0, \ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1$$

$$(\text{for } \beta_i^- = 0)$$

$$\max \sum_{i=1}^{k} w_i x_{n+1} \cdots\cdots\cdots (\text{System } D_2)$$

$$\text{s.t.} \quad x_{n+1} \leqq \frac{(AX)_i - b_i + t_i^-}{t_i^-}, \quad i = 1, \cdots\cdots, K$$

$$x_{n+1} \leqq 1$$

$$x_j \geqq 0, \ j = 1, \cdots\cdots, n, \ x_{n+1} \geqq 0, \ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1$$

$$(\text{for } \beta_i^+ = 0)$$

本 模型이 Hannan 模型에 의한 최적해와 동일한 최적해를 제시할 수 있는지를 검토해 보기 위해서, 두 모형의 解可能領域 (feasible solution region) 및 目的函數가

---

23) E.L. Hannan, *op.cit.*, P.529.

同一한지를 고찰하고자 한다.

Hannan 모형의 해가능영역은 Narasimhan 모형의 것과 동일하다.[24] 본 모형의 한 시스템인 시스템 D_1 의 제약조건은 (式4 − 12)와 같다.

$$\left.\begin{array}{lll} b_i \geqq (AX)_i & & \text{if } x_{n+1} = 1 \\ b_i + t_i^+ \leqq (AX)_i & & \text{if } x_{n+1} = 0 \\ b_i < (AX)_i < b_i + t_i^+ & & \text{if } 0 < x_{n+1} < 1 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (4-12)$$

여기서 $\Delta_i = t_i^+$ 라고 하면, 시스템 D_1 의 해가능영역은 Narasimhan 모형의 한 해가능영역인 (式4 − 6)과 같게 된다. 같은 方法으로 시스템 D_2 의 해가능영역이 Narasimhan 모형의 또다른 해가능영역인 (式4 − 7)과 같음이 증명될 수 있다. 따라서 Hannan 모형의 해가능영역과 본모형의 해가능영역이 같다고 할 수 있다.

Hannan의 모형은 $(t_i^+ = t_i^- = \Delta_i)$인 경우를 위한 모형이다. Hannan 모형의 목적함수와 본모형의 목적함수가 동일한지를 알아보기 위해서 시스템 D의 제약조건을 t_i^+ $[= t_i^-]$로 나눈다. 그러면 시스템 D는 시스템 D_3 가 된다.

$$\min \sum_{i=1}^{k} w_i\ (\beta_i^- + \beta_i^+) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(System } D_3)$$

$$\text{s.t. } \frac{(AX)_i}{t_i^+} + \beta_i^- - \beta_i^+ = \frac{b_i}{t_i^+},\quad i = 1, \cdots\cdots\cdots, K$$

이제 $\beta_i^- = d_i^-$, $\beta_i^+ = d_i^+$ 그리고 $t_i^+ = \Delta_i$ 라고 하면, 시스템 D_3의 목적함수는 시스템 E의 목적함수와 같다. 즉, 시스템 D의 解可能領域 및 目的函數가 시스템 E의 것과 같다. 그러므로 $\lambda^* = \lambda^o$임이 입증된다.

지금까지 論議한 內容들에 대해서 Hannan이 인용하였던 다음의 〈例4 − 1〉을 중심으로 Hannan 모형과 본모형을 비교하고자 한다.

例4 - 1 : A회사는 두 製品을 生産·販賣하고 있는데, 製品1의 단위당 販賣利益은 80달러이며, 製品2의 단위당 販賣利益은 40달러이다. 이 회사의 經營者는 約 630 달러 ("around" $630)의 利潤을 획득하기를 희망하고 있다.[25] 그리고 製品1은 약 6단위("about" 6 units), 製品2는 약4단위를 販賣하고자 한다. A회사의 3목표들에 대한 重要度는 利潤目標가 0.4 그리고 製品1의 販賣目標 및 製品2의 판매목표의

24) *Ibid*, PP.524 ~ 526

25) 이윤 목표는 前述한 〈式3 − 3〉과 같은 $(AX)_i \gtrsim bi$ 형의 멤버쉽함수가 적합할 것으로 본다. 그러나 여기서는 모형들의 構造比較가 목적임으로 Hannan이 인용한 멤버쉽함수형태인 $(AX)_i \eqsim b_i$ 형의 멤버쉽함수를 취하는 이윤목표를 가정한 것이다.

重要度는 동일하게 0.3이며, x_1 과 x_2는 각각 製品1 및 2의 生產•販賣量이라고 가정한다.

Hannan의 接近方法으로 불명확목표계획문제에 대한 最適解를 구하려 한다면, 例 4.1의 불명확목표계획문제는 시스템 F의 최적해를 구하는 문제가 된다.

$$\min Z = 0.4\,(d_1^+ + d_1^-) + 0.3(d_2^+ + d_2^-) + 0.3(d_3^+ + d_3^-) \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{system F})$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & 8x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ = 63 \\
& 0.5\,x_1 + d_2^- - d_2^+ = 3 \\
& 0.5\,x_2 + d_3^- - d_3^+ = 2 \\
& \lambda + d_1^- + d_1^+ \leqq 1 \\
& \lambda + d_2^- + d_2^+ \leqq 1 \\
& \lambda + d_3^- + d_3^+ \leqq 1 \\
& x_1,\ x_2 \geqq 0, \quad \lambda \geqq 0,\ d_i^+,\ d_i^- \geqq 0,\ i = 1,\ 2,\ 3.
\end{aligned}$$

例 4 . 1에 대해서 公差槪念을 적용해서 최적해를 구하고자 할 경우, 그 例題는 시스템G와 같게 된다.

$$\min Z = 0.4(\beta_1^+ + \beta_1^-) + 0.3\,(\beta_2^+ + \beta_2^-) + 0.3\,(\beta_3^+ + \beta_3^-) \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{system G})$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & 80x_1 + 40x_2 + 10\beta_1^- - 10\beta_1^+ = 630 \\
& x_1 + 2\beta_2^- - 2\beta_2^+ = 6 \\
& x_2 + 2\beta_3^- - 2\beta_3^+ = 4 \\
& x_1,\ x_2 \geqq 0,\ \beta_i^+,\ \beta_i^- \geqq 0,\quad i = 1,\ 2,\ 3.
\end{aligned}$$

시스템F와 시스템G의 最適解를 구하여 본 結果, 두 시스템의 최적해가 同一하였으며, 그 結果値는 $x_1 = 5.875$, $x_2 = 4$ 그리고 利潤은 630 달러였다.

V. 結　言

各 目標들의 重要度(importance, weight)가 서로 다른 경우의 불명확 목표계획문제에 대한 接近方法을 中心으로 연구한 結果로서 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다.

본 모형은 Hannan의 모형과 Narasimhan의 모형의 경우 보다 敏感度分析이 간단하다[26] 그들의 모형에 대한 敏感度分析이 본 모형의 경우보다 어려운 理由는 다음과 같다.

經營目標에서 불명확성을 설명해 주는 것은 Δ_i(t_i^+ 혹은 t_i^-)의 역할인데, 본모형에에는 t_i^+〔t_i^-〕의 값이 변하면 변수 β_i^+〔β_i^-〕에만 영향을 미친다. 그러나 Hannan 모형 또는 Narasimhan 모형에서는 하나의 i 번째 불명확목표의 Δ_i 값이 변하면 i 번째 목표의 모든 意思決定變數(χ_j, $j = 1, \cdots\cdots, n$)의 係數(a_{ij}, $j = 1, \cdots\cdots, n$)와 b_i 값에 동시에 영향을 미친다.

旣存의 불명확목표계획모형들 중에서 Hannan의 모형을 중심으로 本模型의 妥當性을 비교연구한 것은 Hannan의 모형이 Narasimhan의 모형보다 더 개선된 모형이기 때문이다.[27]

Hannan 모형은 $t_i^+ \fallingdotseq t_i^-$인 경우의 불명확목표에 대해서는 설명력이 부족하지만, 본 모형의 경우는 그런 경우에도 쉽게 적용될 수 있다.

두 定理에서 證明한 것처럼 본 연구에서 제시한 접근방법이 보다 적은 제약조건으로써 Hannan의 접근방법에 의한 최적해와 동일한 최적해를 구할 수 있다. 구체적으로 말해서 불명확목표들의 수가 K개인 문제에 대한 최적해를 구하려면 Hannan 모형은 2K개의 제약조건이 있는 하나의 LP문제가 된다. 그러나 본 연구에서 제시한 接近方法을 취할 경우, 단지 K개의 제약조건이 있는 하나의 LP문제로 부터 Hannan

---

26) 멤버쉽함수를 이용한 불명확목표계획문제에 대한 접근모형에 의 민감도분석은 다음의 論文을 참조.
H. Hamacher, H. Leberling and H. J. Zimmermann, "Sensitivity Analysis in Fuzzy Linear Programming," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.1, 1978, PP. 269 – 281.

27) E. L. Hannan, op.cit., PP.522 – 531 ; E. L. Hannan, "Some Further Comments on Fuzzy Priorities", *Decision Sciences*, Vol.12, 1981, PP. 539 – 541.

모형을 통해서 얻을 수 있는 것과 동일한 最適解를 구할 수 있다.

不明確目標計劃에서 앞으로 더 硏究되어야 할 연구의 方向·課題들은 다음과 같다. 不明確한 정도에 따라서 달라져야 하는 公差의 크기의 合理的인 決定方法, 目標들間의 불명확한 優先順位 또는 重要度의 합리적인 처리방법, 그리고 實證的인 硏究가 요구된다.