効用理論面에서 본 投資價値 測定모델에 대한 批判*

Multiperiod Valuation Revisited

金 基 祥**

《目 次》

投資(資產)의 가치를 결정하는 문제는 財務에 관한 의사결정을 하는데 핵심을 이루고 있다. 기업경영에서 경영자의 궁극적인 목적은 株主들의 富(wealth)를 극대화하는 것이라고 할 수 있는데, 投資價値를 결정할 수 있게 됨으로 기업 재무상태의 모든 결정도 또 기업의 평가도 비로소 올바로 할 수 있는 것이다.

投資價値를 찾아내는 문제에 대해서는 많은 연구가 되어졌다. 특히 投資期間이 단기(Single-period)인 경우의 문제에 대해서는 상당히 많은 연구가 되어 있어서 더 이상 좋은 연구가 나오기 어렵다는 생각을 할 정도인데, 投資期間이 긴(multi-pericd) 경우의 不確實한 現金흐름(random cashflow)을 다루는 문제에 대해서는 아직도 초기 단계에 있다고 하겠다. 현금의 흐름이 장기적인 경우에 투자가치를 알아내는 방법 중에서 위험을 감안한 할인율을 사용하는 (Risk-adjusted discount rate: RADR) 방법(純現價法)과 確實性等價(Certainty equivalent: CE)方法이 실질적으로 널리 사용되고 있는데 이 논문에서는 RADR과 CE方法의 타당성을 von Neumann-Morgenstein의 効用理論에 비추어 분석해 보고자 한다.

RADR과 CE方法은 短期均衡理論의 면에서 많이 다루어 졌으며, 동시에 장기적인 불확실한 현금의 흐름을 평가하는데도 쓰여졌다. Bogue와 Roll은 Dynamic Programming 技法을 이용해서 CAPM의 범위내에서 長期投資分析을 시도했다. 이들의 분석은 project의 중고시장이 존재한다는 것을 전제하고 있어서 현재의 투자가치를 찾아낸다는 것은 그리 큰 공헌이라고 말할 수 없는지도 모른다. 더구나 그들은 스스로 CAPM세계에서 nonstationa-

---

* 교내 학술 연구비의 지원을 받아 쓰여짐
** 한양대학교 상경대학 부교수

rity 가 존재할 경우에는 CAPM 을 이용 Dynamic programming fashion 으로 만든 投資價値決定 모델은 계산상으로 복잡하고 또 현실성도 없다고 결론 짓고 있다. Fama 는 "stationary CAPM" 가정하에서 허용될 수 있는 불확실성들을 분석하고 만약 미래에 예상되는 현금의 흐름을 期待値로나마 예측할 수 있고, 또 Stationary CAPM 가정이 현실성이 있다면 RADR 方法이 옳다고 하고 있다. 이러한 Stationarity 가정하에서는 미래의 RADR 의 불확실성을 인정하지 않고 있으며 RADR 와 CE 方法을 쓰기 위해서는 이런 비현실적인 엄격한 제약조건이 필요하다는 것은 주목할 만하다.

이 논문에서는 개인투자가들이 위험과 시간의 선호를 나타내 주고있는 n-dimensional utility function 의 존재를 전제로 하고 있다. 우선 不確實한 現金 흐름(random cashflow) $X'=\{x_1, \cdots\cdots, x_n\}$을 생각해 보자. 만약 不確實한 現金흐름 X_t에 이론적으로 옳은 risk premium α_{x_t}이 있다고 할 때 우리는 아래와 같은 식을 세울 수 있다.

$$U^{-1}\{E[U^*(\underset{\sim}{x})]\}=\sum_{t=1}^{n}[E(X_t)/\prod_{t=1}^{t}(1+r_j+\alpha_{x_t})]$$

$U^*(X)=$n-dimensional von Neumann-Morgenstein 효용함수

$U^{-1}=U^{-1}[U^*(X, 0, \cdots\cdots, 0)]$ for every X

$r_j=$forward 무위험 이자율

$\alpha_{x_t}=$risk premium

식 (1)에서 α_{x_t}는 $F_t(x)=\text{prob }(X_t\leq x)$에 의해 결정이 되며 prob $(X_t=x)=1$인 경우에는 risk premium $\alpha_{x_t}=0$이 된다.

일련의 確實한 現金의 흐름을 나타내 주는 vector $\underset{\sim}{X}$가 주어졌을 때 우리는 $U(\cdot)=U^*(\cdot, 0, \cdots\cdots, 0)$를 식 (1)의 양변에다 적용하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있는데, 여기서 $\alpha_{x_t}=0$가 된다.

$$U^*(\underset{\sim}{x})=U^*(\sum_{t=1}^{n}a_t x_t,\ 0,\ \cdots\cdots, 0) \tag{2}$$

$$a_t=\prod_{j=1}^{t}(1+r_j)^{-1}$$

식 (2)가 모든 vector $\underset{\sim}{x}$에 대해 성립되기 위해서는

$$U^*(\underset{\sim}{x})=U(\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{x}) \tag{3}$$

가 되며 여기에서 $\underset{\sim}{a}'=(a_1, \cdots\cdots, a_n)$, $U(\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{x})=U^*(\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{x}, 0, \cdots\cdots, 0)$이다. 그리고 x는 確實한 現金 흐름을 나타내주는 vector 이다. 完全資本市場(perfect capital market)에서는 투자가들은 수수료를 내지 않고도 r_f로 빌릴 수도 있고 빌려 줄수도 있는데 식 (3)에 있는 $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{x}$는 市場價格을 나타내 주고 있다. 이러한 市場價格이 결정이 되면 현재의 富(wealth)를 기간에 따라 할당하는 문제는 투자가의 미래의 效用函數가 알려지면 完全資本市場에서는 큰 문제가 안된다. 현금의 흐름이 불확실한 경우에 식 (3)이 어떻게 변형되는가를 알아보기 위

해 函數 $g(X)$와 $h(X)$를 생각해 보자. 어떤 Measure $F(X)$에 대한 $g(X)$와 $h(X)$

에서 $g(\underset{\sim}{X})=f(\underset{\sim}{X})$ for $\underset{\sim}{X}\in R_n$

인 경우 이 식들의 Riemann-Stieltjes積分을 구하면 아래와 같다.

$$\int_{R_n} g(\underset{\sim}{X})dF(\underset{\sim}{X})=\int_{R_n} h(\underset{\sim}{X})dF(\underset{\sim}{X}) \tag{4}$$

식 (3)이 모든 vector X에 다 적용되기 때문에 식 (4)를 (3)에 응용하면

$$\int U^*(\underset{\sim}{X})dF(\underset{\sim}{X})=\int U(\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{X})dF(\underset{\sim}{X}) \tag{5}$$

가 나온다. 그런데 $F(X)$는 random vector X에 대한 n-variate CDF (cumulative density function)이기 때문에 식 (5)는

$$E[U^*(\underset{\sim}{X})]=E[U(\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{X})] \tag{6}$$

이 된다. 이 식을 이용해서 RADR 모델을 살펴보자.

I. RADR 方法에 대한 분석

RADR方法을 분석하기 위해 하나의 간단한 예를 생각해 보자. S년 후에만 不確實한 現金흐름(random cashflow) X를 기대할 수 있고 그 이외의 모든 기간 동안에는 전혀 현금의 흐름이 예상되지 않는 경우에는, 만약 RADR方法이 옳다면, risk premium $\alpha_X>0$가 존재한다. 식 (6)을 이용하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$U^{-1}[E(U^*(X)]=U^{-1}\{E[U(X/\prod_{t=1}^{S}(1+r_t))]\}$$

$$=E(X)/\prod_{t=1}^{S}(1+r_t+\alpha_X) \tag{7}$$

다음으로 $K(K<S)$년 후에 예상되는 不確實한 現金흐름(random cashflow) Y를 생각해 보자. 그러면 Y와 X는 $Y=X/\prod_{t=k+1}^{S}(1+r_t)$와 같은 관계가 성립하는데 여기에서도 마찬가지로 α_Y가 존재한다. 그러면 아래와 같은 식이 성립되는데

$$U^{-1}\{E[U(Y/\prod_{t=1}^{K}(1+r_t))]\}=E(Y)/\prod_{t=1}^{K}(1+r_t+\alpha_Y) \tag{8}$$

위의 식을 X로 표시하면

$$U^{-1}\{E[U(X/\prod_{t=1}^{S}(1+r_t))]\}=E(X)/[\prod_{t=1}^{K}(1+r_t+\alpha_Y)\prod_{t=K+1}^{S}(1+r_t)] \tag{9}$$

가 된다. 그런데 (9)와 (7)은

$$\prod_{t=1}^{K}(1+r_t+\alpha_Y)\prod_{t=K+1}^{S}(1+r_t)=\prod_{t=1}^{S}(1+r_t+\alpha_X) \tag{10}$$

$$\text{for every } K=2,\cdots\cdots,S \text{ and } S=2,\cdots\cdots,r \tag{10}$$

식 (10)을 $K=L$과 $K=M$인- $L<M$- 두 시점에서 보면, 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$[\prod_{t=L+1}^{S}(1+r_t)][\prod_{t=1}^{L}(1+r_t+\alpha_Y)]=[\prod_{t=M+1}^{S}(1+r_t)][\prod_{t=1}^{M}(1+r_t+\alpha_Y)] \tag{11}$$

이 식에서 우리는 최종적으로 아래와 같은 식을 얻게 된다.

$$\prod_{t=L+1}^{M}(1+r_t)=\prod_{t=L+1}^{M}(1+r_t+\alpha_Y) \tag{12}$$

식 (12)는 $\alpha_Y=0$ 인 경우에만 성립되며 이것은 동시에 $\alpha_X=0$ 를 의미한다. 그런데 X는 일반적인 random vector 를 의미하기 때문에 RADR 에서의 "$\alpha_X>0$" 사실과 모순이 되는 것이다. 더구나 식 (7)에서 볼 수 있는 것처럼 $\alpha_Y=0$ 인 경우에는 $U^*(X)$는 線型函數가 되는데, 이것은 效用函數가 線型인 경우 즉 투자가들이 위험에 중립적인 태도를 갖는 경우에만 RADR 모델을 쓸 수 있다는 결론을 내릴 수가 있다.

II. 確實性等價(Certainty Equivalent) 모델 分析

CE 方法도 RADR 方法에 못지 않게 널리 쓰이고 있는 방법인데 여기에 포함되어 있는 가정은 투자가들이 자기의 效用函數를 이용하여 일련의 確實性等價 現金을 계산할 수 있다는 것을 의미한다. 다시 말하면

$$U^{-1}[E(U^*(\underset{\sim}{X}))]=\sum_{t=1}^{N}\mathrm{CE}(X_t)/\prod_{j=1}^{t}(1+r_t) \tag{13}$$

을 의미한다. 위 식에서 $\mathrm{CE}(X)=x$이며 만약 效用函數가 X가 예상되는 시기와 독립적인 관계를 갖고 있고, 또 다른 시기에 예상되는 현금의 흐름과도 독립적인 관계를 갖고 있다면, $U^*(X)$가 線型인 경우에만 식 (13)이 성립되며 이에 대한 증명은 아래와 같다.

위의 I에서 현금의 흐름이 확실한 경우 $U^*(\underset{\sim}{x})=U(\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{x})$가 성립되었다. 현금의 흐름인 X가 t 期에 예상이 될 때 우리는 $U_t(X)=U^*(0, \cdots\cdots, X, \cdots\cdots, 0)$를 얻게 되고 random cashflow X와 Y에 대해서

$$\mathrm{CE}(X)\gtreqless\mathrm{CE}(Y)\Leftrightarrow U^{-1}\{E[U_t(X)]\}\gtreqless U^{-1}\{E[U_t(Y)]\} \tag{14}$$

가 성립된다. 그런데 식 (14)는 위험과 시간에 독립적인 관계를 유지하고 있어서, Hora 와 Austin (1983)의 논문의 정의 (I)에서 볼 수 있는 것처럼 식 (3)과 (14)에서 $U(\cdot)$는 constant relative risk aversion 을 의미하게 된다(참조 Pratt).

이제 vector $\underset{\sim}{x}'=(x, X_1)$를 생각해 보자. 여기에서 처음의 x_1은 확실한 현금의 흐름이고 두번째의 X_1은 random 이다. 만약 $\mathrm{CE}(X_2)$가 다른 기간에 예상되는 현금의 흐름과 독립적인 경우에는 식 (3)과 (13)을 이용 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$U^{-1}\{E[U(X_1/(1+r_1)+X_2/(1+r_1)(1+r_2))]\}$$
$$=X_1/(1+r_1)+\mathrm{CE}(X_2)/[(1+r_1)(1+r_2)]. \tag{15}$$

여기에서 (15)가 모든 x_1에 대해 성립되기 위해서는 식 (3)에서의 效用函數는 constant absolute risk aversion의 성격을 갖게된다.

하나의 効用函數가 absolute risk aversion과 constant risk aversion의 성격을 동시에 갖고 있다는 것은 그 効用函數가 線型이라는 것을 의미하며 이런 경우에 効用函數는 아무 의미가 없는 것이다. 다시 말하면 개인의 効用函數가 위험에 중립적인 경우에만 모델과 일치한다.

III. 맺는말

위에서 RADR와 CE方法은 투자가의 効用函數가 線型인 경우에만 Multiperiod project의 분석에 사용될 수 있다는 결론인데, 이것은 RADR과 CE 두 方法이 전부 von Neumann-Morgenstein의 axiomatic approach와 상충된다는 말이다. 또 다른 여러 측면에서도 교과서마다 널리 쓰이고 있는 이 두 方法(CE와 RADR)이 아주 특수하고 제한된 조건하에서만 성립되는 것이어서 이 方法들을 계속해서 써야 하느냐 하는 문제가 제기되지 않을 수 없다. 다만 이 두 方法을 대체할 만한 대안이 없다는 것이 문제일 뿐이다.

參 考 文 獻

1. Bhattacharya, S., "Notes on Multiperiod Valuation and the Pricing of Options," *Journal of Finance* 36 (March 1981), 163-18.
2. Bogue, M.C. and R.R. Roll, "Capital Budgeting of Risky Projects with Imperfect Markets for Physical Capital," *Journal of Finance*, (May 1974), 601-613.
3. Breeden, D.T., "An Intemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption Investment Opportunities," *Journal of Financial Economics* 7 (September 1979), 273.
4. Brennan, M., "An Approach to the Valuaition of Uncertain Income Stream," *Journal of Finance* (June1973), 1061-1063.
5. Constantinides, G.M., "Admissiable Uncertainty in the Intertemporal Asset Pricing Model," *Journal of Financial Economics* 8 (March 1980), 71-86.
6. Fama, E., "Risk-Adjusted Discount Rates and Capital Budgeting Under Uncertainty," *Journal of Financial Economics*, (May 1974), 43-66.
7. Hora, S.C. and L.M. Austin, "On the Evaluation of Intertemporal Lotteries," *Operations Research*, (July-August 1983).

8. Merton, R.C., "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica* 41, (September 1973), 867-887.
9. Meyer, R., "Preference over Times," in R.Kenney and H. Raiffa, *Decisions with Multiple Objectives*, John Wiley and Sons, Inc., New York (1976).
10. Mossin, J., "Optimal Multiperiod Portfolio Policies," *Journal of Business*, 41, (April 1968), 215-229.
11. Pratt, J.W., "Risk Aversion in the Small and the Large," *Econometrica* 32, (January-April 1964), 122-136.